

Dr. DEMETRIOS D. MOUKANOS
Universität Athen

PROBLEME DER PLATONISCHEN PHILOSOPHIE DER MATHEMATIK

I

Die Zahlentheorie Platons. Der Erkenntnisweg zum Unbedingten, zur Wahrheit.

*Ἄλλὰ μὴν λογιστικὴ τε καὶ ἀριθμητικὴ περὶ ἀριθμὸν πᾶσα.
Ταῦτα δέ γε φαίνεται ἀγωγή πρὸς ἀλήθειαν* (Plat. Staat, 525 a-b)

A. Die Mathematik als ἀγωγή πρὸς ἀλήθειαν

Die Aufgabe dieses Aufsatzes ist es zu untersuchen, was sich aus den Dialogen für Platons Auffassung über das Mathematische und seine Beziehung zu den Ideen gewinnen läßt.

Es ist von großer Bedeutung für die vorliegende Untersuchung, den Begriff «ἀριθμός» oder «τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα» zu untersuchen, um zu verdeutlichen, was unter der Mathematik bei Platon zu verstehen ist. Mit der genaueren Bestimmung der Zahl wird ein klares Verständnis für das Wesen der Mathematik bei Platon erreicht, welche Platon als «ἀγωγή πρὸς ἀλήθειαν (525 b)», zur Wahrheit leitend, bezeichnet hat.

Im Plat. Staat, 525 d lesen wir: Τοῦτό γε, ὃ νυνδὴ ἐλέγομεν, (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) ὡς σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἕαν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἀπτα σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγῃται: «Die Disziplin des Rechnens führt die Seele in die Höhe und nötigt sie, sich mit den Zahlen selbst zu beschäftigen. Es dürfen in der Zahlenwissenschaft nicht mit sicht- und greifbaren Körpern behaftete Zahlen an die Stelle der reinen Zahlen treten». Und weiter: Die Körper sind teilbar und von ungleicher Größe, die reine Einheit ist unteilbar und jede einer jeden exakt gleich zu denken und nicht im mindesten verschieden (526 a; *Phileb.* 56 d, e). So aber ist die reine Einheit (καθαρὰ μονάς) nur durch Denken

gesetzt. Darum ist vor allem die Zahlenlehre, wenn sie lediglich um des Erkennens Willen betrieben wird (525 d), geeignet, die Fähigkeit des reinen Denkens, der Wahrheit selbst zu entwickeln (526 b). So ist es zu verstehen, daß die Arithmetik, und so auch die Geometrie, Wissenschaften sind von dem, was immer ist, und nicht von dem, was wird und vergeht (527 b). Arithmetik führt vom Werden zum Sein, d.h. zur Wahrheit (525 b, c). Und darum ist sie ein Mittel, das zur reinen Erkenntnis führt¹. Die Mathematik reinigt das Organ der Seele, das unter anderen Beschäftigungen erlöschen und erblinden würde und facht ihr Licht wieder an, das doch mehr wert ist erhalten zu werden als tausend Augen, denn nur damit wird Wahrheit gesehen (527 d, e). Daraus ergibt sich, daß der Gegenstand der mathematischen Wissenschaft nicht ist, was man sieht, nämlich die Erscheinung, sondern das, was man nicht sieht, nämlich die Zahlen selbst. Die Seele wird dahin gebracht, die Natur der Zahlen, wie sie in sich selbst sind- und also nicht wie sie im Hinblick auf irgendwelche Gegenstände der Sinne erfaßt werden — mit dem Verstande allein ($\tau\eta\ \nuο\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\ \alpha\lambda\tau\eta\eta$) zu ergreifen (525 c).

B. Der Unterschied zwischen praktischer und rein theoretischer Mathematik

Die Bestimmung des Wesens der Mathematik bei Platon ermöglicht die Betrachtung der Zahl. Denn im Grunde muß die ganze Problematik der Zahl von hier aus geprüft werden. Es handelt sich hier zuerst ohne Zweifel um die Genauigkeit ($\acute{\alpha}\chi\rho\acute{\iota}\beta\epsilon\iota\alpha$) der mathematischen Wissenschaften. Auch bei diesen ist jedoch noch zu unterscheiden zwischen der reinen, philosophischen und der gemeinen, praktischen Mathematik. Sokrates fragt im *Phileb.* 56 d: «Muß man nicht gestehen, daß die gemeine Arithmetik eine ganz andere ist als die $\tau\omega\nu\ \phi\iota\lambda\omicron\sigma\phi\omicron\upsilon\nu\tau\omega\nu$?» Es ist hier zu sagen, daß ein anderes die Arithmetik ist, wie sie gemeinhin von den vielen betrieben wird, und ein anderes, wie sie von den Wahrheitssuchenden betrieben wird. Und auf die Frage seines Gesprächspartners Protarchos, welcher Unterschied denn hier bestehe, antwortet er: «Die Unterscheidung ist nicht klein, o Protarchos. Die einen nämlich zählen ungleiche Einheiten zusammen, wie zwei Lager oder zwei Ochsen und zwei allergeringste oder auch zwei allergrößte, die anderen aber gehen gar nicht

1. Eine Darstellung der Arithmetik bei Platon findet sich in: Jakob Klein, *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* («Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Abt. B, Band 3, Heft 1, Berlin 1934, S. 29-36, 71-79).

mit, wenn einer nicht eine Einheit setzt, welche von jeder Einheit durchaus nicht verschieden ist (*Phileb.* 56 d, e)».

Gemäß dieser Stelle gibt es Leute, die Seiendes zählen, deren jedes von jedem sachhaltig verschieden ist. Zahl ist hier Anzahl von etwas, d.h. das Zählen gibt die bloße Anzahl und nicht die unterschiedenen Sachbestimmungen, die dem Gezählten zukommen. Die Schafe können geschlachtet, die Stühle verbrannt werden, aber den reinen Einsen, mit denen die reine Mathematik rechnet, kann nichts geschehen. Sie entstehen und vergehen nicht und verändern sich nicht. In dem einen Falle handelt es sich um Mengen von «ungleichen» Gegenständen — und das sind offensichtlich alle sinnlich wahrnehmbaren Dinge —, in dem anderen um Mengen von völlig gleichartigen Einheiten, wie sie eben im Bereich der sinnlich wahrnehmbaren Dinge gar nicht vorkommen können. In dem ersten Fall haben wir eine Anzahl von so und so bestimmten Gegenständen und sie zeigt an, daß es dieser Gegenstände gerade so und so viele gibt. Als Disziplin beachtet jedenfalls die Arithmetik das jeweilige «Wieviel», die jeweilige unter das betreffende Eidos fallende Menge von Monaden. Jede arithmetische Überlegung, mag sie praktischer oder theoretischer Natur sein, zielt notwendig, sofern es ihr auf die Beziehung der Anzahlen untereinander ankommt, unmittelbar auf dieses «Wieviel», auf die Menge des jeweils Aufeinanderbezogenen bzw. Berechneten. Mit den obigen Stellen des *Philebos* weist Platon deutlich auf die Wissenschaftslehre des *Staates* zurück (525 d, 527 a)²: Das mathematische Studium hat seinen Wert im bloßen Erkennen, zur Weckung philosophischer Gesinnung.

Dieselbe Unterscheidung zwischen dem aufs Erkennen gerichteten und dem praktisch aufs Ausführen und Tun gerichteten Mathematischen kehrt im «*Staatsmann*» wieder (258 d, e). Der Fremde im Dialog stellt die Frage: Sind nun nicht die Arithmetik und einige andere ihr verwandte τέχναι frei von Handlung, und bewirken bei uns bloß eine Einsicht? Die Tischlerei aber und alle anderen Handwerke beinhalten die Kenntnis in Handlungen. Auch ist das inhaltliche Unterscheidungsmerkmal bei der Arithmetik hier genau dasselbe wie im *Staat* (525 d, 526 a): die praktische Arithmetik rechnet mit beliebig ungleichen, die rein theoretische nur mit streng gleichen Einheiten. Der Vorrang der Mathematik vor allen anderen

2. A. Wedberg kommt in seinem Buch *Plato's Philosophy of Mathematics*, Stockholm 1955, S. 127 durch eine vergleichende Analyse der entsprechenden Stellen zu dem Ergebnis: the interpretation of the numbers of philosophical arithmetic is the same in the «*Philebus*» as in the «*Republic*».

Disziplinen wegen ihrer Genauigkeit, Reinheit, Deutlichkeit und Wahrheit, ausgenommen allein die Dialektik, die alle anderen erkennt (*Phileb.* 58 a), ist damit evident. Denn hier wird nicht nach dem Nutzen im praktischen Leben, sondern allein nach Reinheit, Wahrheit und Genauigkeit der Erkenntnis gefragt.

Der rein theoretischen Mathematik wird Wahrheit und Exaktheit zugeschrieben; ihre Gegenstände gehören nicht zur wahrnehmbaren Welt des Werdens. Platon unterscheidet zuerst zwei Zahlenarten: die rein mathematischen Zahlen und die praktischen Zahlen des täglichen Lebens. Mit den praktischen Zahlen ist die in solchen Stellen wie *Phileb.* 56 d sicher primär gedachte Bestimmung von sinnlich Unbestimmten durch Zahlen, nämlich das Messen gemeint. Diese platonische Unterscheidung ist uns heute schwer verständlich; denn uns scheinen die Zahlen im täglichen Leben in vielen Fällen exakt anwendbar, z.B. wenn wir eine Anzahl Menschen abzählen. Die davon verschiedene platonische Auffassung rührt daher, daß die Zahl als eine Menge von Einheiten gefaßt wird und an den Begriff der Einheit viel schärfere Anforderungen gestellt werden als heute. Ein $\epsilon\nu$ soll gar nichts von Vielheit enthalten, aber jeder wahrnehmbare Gegenstand enthält Teile. Deshalb trennt Platon die rein mathematische Zahl streng von der praktischen Zahl des täglichen Lebens. Die reine Arithmetik hat nicht mit sinnlich wahrnehmbaren Dingen, sondern mit in sich unteilbaren reinen Einsen zu tun, die untereinander völlig gleichartig sind und als solche nur vom Verstand erfaßt werden können. Aber sie erwächst einerseits aus dem faktischen Zählen und andererseits aus dem Rechnen, d.h. dem in-Beziehung-Setzen der Anzahlen untereinander.

Im wahrnehmbaren Erleben ist die Zahl eine Formeigenschaft einer Gruppe von irgendwelchen Dingen. Die «Drei» z.B. ist immer die Eigenschaft einer jeden beliebigen Gruppe, die aus drei Dingen besteht. Zahl ist eine bestimmte Anzahl von bestimmten Dingen. So heißt es bei Platon: «unter Zählen wollen wir doch nichts anderes verstehen als: nachsehen, wie groß eine Anzahl im gegebenen Fall ist» (*Theaet.* 198 c). Der Arithmos gibt jeweils eine bestimmte Anzahl von bestimmten Dingen an. Er meint die Dinge, sofern sie in dieser bestimmten Anzahl vorhanden sind. Wir haben hier keinen Begriff der Zahl, sondern einen Begriff der Anzahl. Die Zahl 5 zum Beispiel bezeichnet eine Vielheit von Objekten, die für den gegenwärtigen Erkenntniszweck als miteinander austauschbar gelten und darum in eine einheitliche Summe zusammengefaßt werden können. Gleichzeitig ist die Zahl 5 als eine bestimmte individuelle Zahl eine numerische Einheit; sie ist nicht an sich fünf verschiedene Zahlen.

Es gehört daher nach Platon zum Wesen der Zahl, daß sie eine Vielheit in ihrer Einheit zusammenfaßt und so zugleich eine Vielheit und eine Einheit ist.

Aus der Erörterung des Wesens der Arithmetik ist hervorgegangen, daß die reine Mathematik sich wohl aus reinen Begriffen herleiten lassen muß. Die im Mittelpunkt der Erörterung stehende Stelle des *Staates* (525 d) hat für Platons Auffassung der Zahlen entscheidende Bedeutung.

Es ist heute schwierig, einzusehen, wie ein Mathematiker etwas anderes außer dem Rechnen mit Zahlen, die auf die Erfahrung angewandt und durch sie erfaßt werden, sollte erkennen können. Das erkennende Bewußtsein knüpft an Sinneserfahrungen an und konzipiert ein System unendlich vieler Zahlen. Im *Gorgias* 451 b, auf die Frage, womit es die Arithmetik zu tun habe, antwortet Sokrates, daß sie zu den Wissensgebieten gehört, die das Gerade und das Ungerade betreffen, und zwar im Hinblick darauf, wieviel das Gerade und das Ungerade jeweils beträgt. Es handelt sich hier um ein Wissen, das wir im Umgang mit den Dingen des täglichen Lebens erwerben und in dem wir es dann auch zu einer besonderen Sachkunde bringen können. Wir pflegen angesichts bestimmter Mengen von Dingen, mit denen wir zu tun haben, deren genaue Anzahl zu bestimmen, d.h. diese Dinge zu zählen. Der Inbegriff dieses Wissens um alle möglichen Anzahlen wird von Plato «Arithmetik» genannt (*Theaet.* 198 b).

Dazu kommt noch der pädagogische Wert der Mathematik. An der Stelle *Gesetze* Z, 819 a-c wird empfohlen der propädeutische Unterricht im Abzählen und Anordnen von Gegenständen, das die ägyptischen Kinder alle im Spielen und nicht auf wissenschaftliche Art lernen. Sodann kommt man auf das Messen (ἐν ταῖς μετρήσεσιν) zu reden, das Messen von Strecken, von Flächen und Körpern (819 c-820 a). Dieses Rechnen mit der Meßbarkeit von Strecken und Flächen wird besonders illustriert durch eine Bemerkung, die Platon vorausschickt, daß es beim Unterricht in diesen Dingen viel besser sei, wenn der Lernende zuvor gar nichts weiß, als wenn er unter schlechter Anleitung viele Übung und viel Wissen in diesen Dingen bereits erworben habe (819 a).

So wie wir an dieser Stelle der *Gesetze* die Arithmetik betrachten, stellt sie ein bloß praktisches Wissen dar: Es handelt sich um ein Wissen, das wir im Hinblick auf die Notwendigkeiten des Lebens erwerben und handhaben müssen. Das Absehen von solchen Zwecken erhebt sie bereits, wie wir gesehen haben, zu einer ganz anderen Würde. So stellt Platon im *Staat* und im *Philebos* der praktischen Arithmetik die entsprechende theoretische Disziplin entgegen.

Die Schwierigkeiten, die sich aus der platonischen Forderung einer reinen Zahlenlehre ergeben, können aber erst verstanden werden, wenn man sich die ontologischen Grundlagen vergegenwärtigt, die für diese Konzeption maßgebend sind (*Staat*, 526 b, 527 b, 525 b, c)³.

Platon hat die reine Mathematik sehr hoch eingeschätzt. Sie galt ihm als die erste wichtige Disziplin, die dazu angetan ist, uns aus der Abhängigkeit von unseren sinnlichen Empfindungen zu lösen. Er hat sie auch als eigentliches Propädeutikum für diejenigen angesehen, denen die politische Leitung eines Staats anvertraut werden soll. Über dem Eingangsportal der «Akademie» standen die Worte: Μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσέρτω, d.h. «keiner, der nicht Geometrie getrieben habe, solle hier eintreten»⁴. Daß das im «Idealstaat» nicht anders sein soll, braucht wohl kaum mehr gesagt zu werden. Platon meint, «wir müssen darauf halten, daß die Bürger in diesem Idealstaat auf keine Weise der Geometrie abhold sind (*Staat*, 527 c)».

II

Der apriorische Charakter der Mathematik nach Platon und die metaphysische Begründung der mathematischen Erkenntnis

Wir werden in diesem Teil versuchen, einen Grundbegriff der platonischen Philosophie darzustellen, nämlich den Begriff der ἀνάμνησις, der Wiedererinnerung, um den apriorischen Charakter der Mathematik nach Platon zu verdeutlichen.

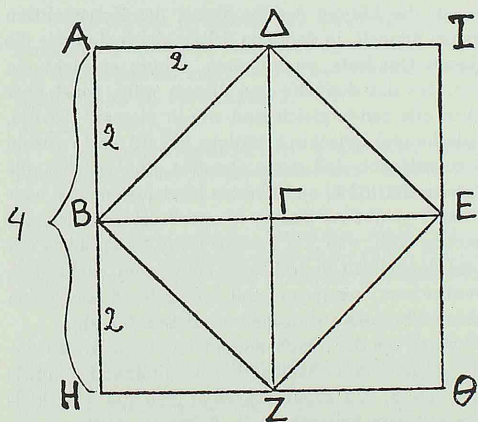
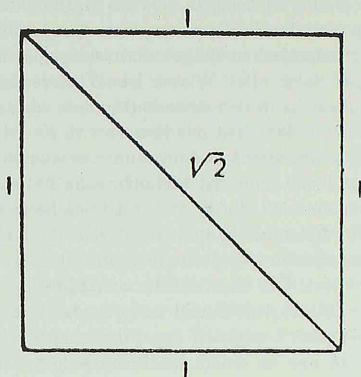
3. Zu diesem Fragenkreis siehe: A'rpád Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest und München/ Wien 1969; Kurt von Fritz, *Platon, Theaetet und die antike Mathematik*, Darmstadt 1969² (Wissenschaftliche Buchgesellschaft); Demetrios D. Moukanos, *Ὁ τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη*, Dissertation Athen 1979; —, *Philosophie der Mathematik bei Platon*, «Wissensch. Jahrbuch der Philos. Fakultät der Universität Athen», Band KZ' (1979), Athen 1980, S. 230-241; Ivor Bulmer-Thomas, *Plato's Astronomy*, «Classical Quarterly» 34 (i) 107-112 (1984).

4. Hans Herter vertritt die Ansicht, daß diese vielzitierte Inschrift zu sehr später Zeit gehöre (*Platons Akademie*, Bonn 1946, S. 12). Die Inschrift ist insoweit doch sehr bezeichnend, als sie die grundlegende Bedeutung der Mathematik für die Philosophie Platons scharf und treffend pointiert. In der Mathematik sah er das geeignete Mittel der Erziehung zum wissenschaftlichen Denken, und so muß auch das Lehrsystem der Akademie auf diesem Fundament aufgebaut werden. Belege für diese Inschrift siehe in Th. Preger, *Inscriptiones Graecae metricae*, Leipzig 1891, Nr. 276, S. 226. Siehe auch den wertvollen Aufsatz von E.S. Stamatis, *Geschichte der Mathematik* (auf Griechisch), Athen 1971, S. 15, wobei E. Stamatis diese Inschrift Tzetzes, *Χιλιάδες* VIII 973 zuschreibt.

Menon ist der Dialog Platons, in dem die Mathematik eine führende Rolle spielt; in ihm wird die Verdoppelung einer Quadratfläche vorgeführt als ein Beispiel der mäeutischen Fragekunst und zugleich als Beweis für den metaphysischen Satz: alles Wissen ist Wiedererinnerung; sie bedeutet wirkliche «Einsicht in den Grund» (*λογισμὸς αἰτίας*, *Menon*, 98 a). Lernen, meint Platon, heißt nicht der Erwerb von Kenntnissen, die vorher in keiner Weise in uns waren und uns nun von aussen einfach irgendwie eingegossen werden. Lernen ist vielmehr eine Art von innerer «Erweckung», bei welcher sich die Seele Prinzipien bewußt wird, die sie immer schon gehabt haben muß, und mit deren Hilfe sie nun den von aussen kommenden «Stoff» ordnet und verknüpft und so zu einer Erkenntnis allererst formt. Die Methode der «Wiedererinnerung» hat den Vorteil, daß sie zur Selbstkritik erzieht und von der Präsumtion falschen Wissens befreit; sie schärft zugleich den Forschungstrieb im Menschen. Dieser Vorgang wird uns an einem mathematischen Beispiel erläutert.

In einer Szene dieses Dialogs (82 b-86a) wird im Gespräch des Sokrates mit dem Knaben des Menon gewissermaßen eine Schulstunde in elementarer Geometrie vorgeführt. Durch geschickte Fragen bringt Sokrates den Schüler dahin, von sich aus, die Erkenntnisse «aus sich selbst herausholend (85 d)» auf die Lösung des Problems, der Konstruktion eines Quadrats, das genau doppelt, in dem alle Seiten gleich sind wie die Seiten eines vorgegebenes Quadrats, zu kommen. «Kann es nicht ein anderes Quadrat geben, das das doppelte von diesem wäre, sonst aber ein eben solches, in dem alle Seiten gleich sind wie in diesem? (82 d)». Der Knabe (er war Grieche und Griechisch erzogen [82 b]) hatte vorhin der Aussage Sokrates zugestimmt, daß es ein Quadrat gibt, welches alle Seiten, die vier sind, gleich hat (82 b, c). Sokrates lehrt hier nichts, sondern fragt nur. Der Knabe glaubt zu wissen, wie groß die Seite ist, aus der das Quadrat entstehen wird, und wie groß es ist (82 c-e). «Aus der doppelten Seite entsteht doppeltes Quadrat, aber ein solches, nicht etwa was hier lang ist, dort aber kurz; sondern es soll nach allen Seiten gleich sein, wie das vorgegebene, aber das zwifache von diesem (83 a)».

Sokrates erläutert ihm, wie der Flächeninhalt eines Quadrates dadurch gewonnen wird, daß man seine beiden Seiten miteinander multipliziert (82 c-d). In der auf S. 578 Figur repräsentieren die vier kleineren Quadrate solche mit der Seitenlänge 2. Sokrates stellt an den Knaben die Frage, wie groß die Seitenlänge eines Quadrates werden müsse, damit sein Flächeninhalt verdoppelt, d.h. von 4 Längeneinheiten im Quadrat auf 8 Längeneinheiten im Quadrat, erhöht werde (82 d-e). Der Knabe beweist, daß er bisher noch nicht Geometrie getrieben hat,

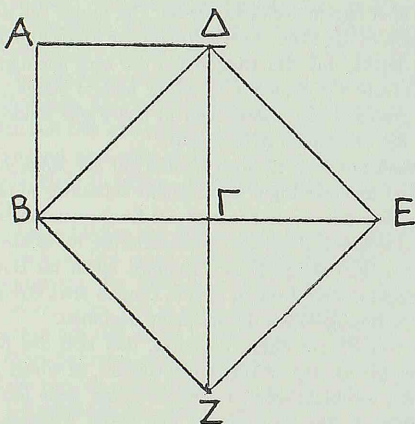


Menon, 85 a-b

«τὸ ὅλον τὸδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίνεται; — Τετραπλάσιον. — Ἐδει δέ γε διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι»

(*Menon*, 84 d-e)

mit seiner Antwort, die Seitenlänge müsse verdoppelt, also von 2 auf 4 erhöht werden (82 e-83 a). Sokrates weist ihm nach, daß das so entstandene Quadrat nicht den doppelten, sondern den vierfachen Flächeninhalt gegenüber dem ursprünglichen aufweisen müsste (83 b-e). Nun wird die Frage an ihn wiederholt. Der Knabe überlegt, daß 4 zu viel und 2 zu wenig ist und wagt auf die Zahl 3 zu «tippen». Sokrates zeigt ihm, daß $3 \text{ mal } 3 = 9$ und damit das so konstruierte Quadrat immer noch zu groß wäre (83 d-e). Nun wird der Knabe verwirrt. Sokrates muß ihm zu Hilfe kommen und ihm an Hand einer Zeichnung zeigen, daß die gesuchte Seitenlänge für das Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt die Diagonale aus dem ersten Quadrat ist (84 e-85 a-b).



Damit sind zwei Quadrate gewonnen, deren Inhalte sich wie 1:2 verhalten, oder, wenn man dasselbe anders ausdrückt: man hat (in Seite und Diagonale des Ausgangsquadrats) zwei Strecken gefunden von der Art, daß die über ihnen errichteten Quadrate sich wie 1:2 verhalten. Hier wird über der Diagonale eines Quadrats wieder ein Quadrat errichtet und gezeigt, daß sein Inhalt doppelt so groß ist, als der des Ausgangsquadrats (85 b). An der Stelle 85 a wird eine Hilfslinie, die Diagonale eines gegebenen Quadrats, gezogen; darin liegt gerade der eigentlich schöpferische Gedanke der ganzen Betrachtung. Und auf diese Hilfslinie kommt der Knabe nicht «aus der Erinnerung», sondern der in der Geo-

metrie erfahrene Lehrer Sokrates zeichnet sie ein und teilt dadurch dem Schüler den entscheidenden Gedanken mit. Das gegebene Quadrat mißt zwei Fuß in der Seite. Nun geht die erste Annahme dahin, die Verdopplung des Quadrats aus der doppelt so langen Linie (4 Fuß) zu versuchen. Sie hebt sich sogleich wieder an der Konsequenz auf, indem die Quadrierung nicht das Doppelte, sondern das Vierfache zeigt. Ebenso ergeht es ihm mit der zweiten Annahme. Er hat jetzt begriffen, daß die gesuchte Linie größer als 2 und kleiner als 4 sein muß. So schließt er auf 3 Fuß. Aber auch so kommen nicht die gesuchten 8 Quadratfuß, sondern 9 heraus. Hiernach gesteht der Knabe, nicht zu wissen, welches die gesuchte Linie sei. Damit ist er schon einen Schritt vorwärts gekommen: vorhin glaubte er es zu wissen, wußte es aber nicht, jetzt weiß er, daß er es nicht weiß. Zugleich aber begehrt er es zu wissen. Der letzte Teil des Gesprächs fängt erst an, sich in die Flächenverhältnisse der Figur hineinzusehen: da findet er denn leicht, daß die Diagonalen der vier aneinander gelegten gegebenen Quadrate das gesuchte Quadrat bereits bilden, und daß folglich auch die gesuchte Seite desselben in der Figur schon mit enthalten ist. Es ist die Diagonale (84e-85a-b).

Das Gespräch mit dem Knaben beruht auf der Möglichkeit, mathematische Schlüsse an einer Figur unmittelbar einsichtig zu machen. Ohne die Figur wäre die «Wiedererinnerung» des Knaben unmöglich. Aber der Grund für die Gewissheit derartiger geometrischer Einsichten kann nicht in einer äusseren Instruktion liegen, sondern allein im Bewußtsein des richtig Ausgefragten. Sokrates und Menon können jetzt ihren Kommentar über das soeben durchgeführte Experiment beginnen.

Das wird von Platon dahin gedeutet, daß sich der Knabe an ein Wissen erinnert (84 a), das er vor seiner Geburt, in einem Leben seiner Seele vor diesem geschichtlichen Leben, erhalten habe (85 d-86a). Das ist Platons Ausdruck für das *a priori*, das «vom früheren Leben her», das uns in der Mathematik entgegentritt. Wir stehen hier vor einer philosophischen Entdeckung des *apriorischen* Charakters der Mathematik⁵.

Der Knabe hier versucht nach Sokrates, das zu suchen oder zu lernen, was er nicht wissend zu wissen glaubte (84 c). Und das versucht Sokrates mit ihm zu machen, indem er ihn immer nur fragt und niemals lehrt (84 c). Der Knabe wußte vor kurzem nichts, wie Sokrates und Menon gestanden hatten. Es waren aber diese Vorstellungen in ihm (85 c). So

5. Siehe: J. Moreau, *Le sens du platonisme*, Paris 1967, S. 107; D. Moukanos, 'Ο τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη, a.a.O., S. 32-35.

wird weiter der entscheidende für Platon Satz formuliert: «in demjenigen, der nicht weiß, sind von dem, was er nicht weiß, dennoch richtige Vorstellungen... Wenn ihn aber jemand oftmals um dasselbe Problem und auf vielfache Art befragt, so weiß er am Ende genau so viel, wie ein Anderer um diese Dinge wissen wird (85 c)». Ohne daß ihn also jemand lehrt, sondern ihn nur ausfragt, wird der Knabe die Erkenntnisse aus sich selbst herausholend haben; «οὐκοῦν οὐδενὸς διδάξαντος ἀλλ' ἐρωτήσαντος ἐπιστήσεται, ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὐτοῦ τὴν ἐπιστήμην (85 d)». Dieses «aus sich selbst Erkenntnis herausholend» heißt weiter «sich erinnern» (85 d). Woran sich erinnern? Sokrates antwortet darauf: «Wenn er (der Knabe) die Erkenntnisse in diesem Leben nicht gehabt hat, dann ist es offenbar, daß er sie in einer anderen Zeit gehabt und gelernt hat (ἐν ἄλλῳ τινὶ χρόνῳ εἶχε καὶ ἐμειμαθήκει) (85e-86a)». Also in dieser Zeit war er kein Mensch (86a).

An der Stelle 81c, d wurde vorhin gesagt: «Da die Seele unsterblich ist und viele Male geboren ist und alles hier in dieser Welt und alles im Hades und überhaupt alles gesehen hat, gibt es nichts, was sie nicht gekannt hat. Man soll sich also nicht darüber wundern, wenn sie im Stande ist, sich die Tugend und alles andere, was sie eben früher erkannt hat, wieder ins Gedächtnis zu rufen... Folglich ist das Suchen und das Lernen Sich-erinnern».

Aus den obigen Stellen des *Menon* geht hervor, daß das mathematische Wissen nach Platon einen *apriorischen* Charakter hat, der durch die Wiedererinnerung der Seele zustande kommt. In jemandem, der nicht weiß, sind von dem, was er nicht weiß, dennoch richtige Vorstellungen (85 c), die man aus sich selbst herausholen kann (85 d). Die menschliche Seele, so führt Sokrates unter Berufung auf Priesterweisheit und auf eine Pindarstelle aus, ist unsterblich (81 a, b). Sie hat in wechselndem Dasein alles Existierende auf Erden und im Hades kennengelernt (81 b, c). Bei dem Zusammenhang aller Dinge untereinander bedarf es nur der Erinnerung an eines, um auch alles andere wiederzufinden (81 d). Suchen und Lernen ist also nur Erinnerung (*ἀνάμνησις*). Zum Beweis entlockt Sokrates, wie wir gesehen haben, einem nie in Mathematik unterrichteten Knaben durch fortgesetzte Fragen die Lösung einer geometrischen Aufgabe. Die dabei entwickelten Kenntnisse sind in dem Gefragten als richtige Vorstellungen (*ἀληθεῖς δόξαι*, 85 c), d.i. als latente Rückstände eines im Präexistenzzustand erworbenen Wissens, bereits vorhanden gewesen. Durch Fragen dann werden die *ἀληθεῖς δόξαι* zu *ἐπιστήμαι* erweckt (85 c ff).

Die «wahre Vorstellung» ist hier gedacht als angeborene Grundlage zur Erkenntnis. In uns schlummern vor der Erkenntnis die «wahren Vor-

stellungen» eben dessen, was wir hernach erkennen; durch Fragen aus dem Schlummer geweckt, werden sie Erkenntnisse. Die «wahre Vorstellung» wäre hiernach von der Erkenntnis gar nicht dem Inhalt nach verschieden. Aber an der Stelle 98 a ist die Rede von dem Unterschied der ἀληθεὺς δόξαι und der ἐπιστήμη. Die ersteren sind nicht stichhaltig, denn sie dauern nicht, verändern sich und haben daher nur geringen objektiven Wert. Das ändert sich erst, wenn das Eigentümliche des Wissens hinzutritt, nämlich daß sie «gebunden» werden durch das «Erschließen der Ursache» (ὥς ἂν τις αὐτὰς δῇσῃ αἰτίας λογισμῷ, 98a). Dieser λογισμὸς αἰτίας ist das Eigentümliche der Wissenschaft.

Die Wahrnehmung bietet nur die Gelegenheit dar, bei welcher sich die Seele an die in ihr schon vorher vorhandene, d.h. rein rational geltende Erkenntnis erinnert. Daß nun aber diese Besinnung auf das rational Notwendige als «Erinnerung» aufgefaßt wird, hängt damit zusammen, daß Platon den Ursprung des *a priori* interpretieren will. Und das macht er über die Grenze der Logik hinausgehend durch eine mythische Darstellung, die wir oben zitiert haben⁶. Die Wiedererinnerung wird metaphysisch mit der Unsterblichkeit der Seele in ihrer Prae- und Postexistenz verknüpft. Die Möglichkeit des Lernens wäre nicht zu begreifen, wenn nicht auch das Unbekannte in anderer Beziehung wieder ein Bekanntes wäre: ein solches nämlich, welches der Mensch früher einmal gewußt, und nur wieder vergessen hat. Denn wie wäre es möglich, mathematische Erkenntnisse aus einem Menschen, dem sie bisher ganz fremd waren, durch bloße Fragen herauszuholen, wenn sie nicht vorher schon in ihm lagen?

Was ist nun aus diesen Ausführungen gewonnen? Die mathematische Erkenntnisse sind nach Platon vor aller sinnlichen Anschauung gegeben. Wir können sie nicht erst in diesem Leben gewonnen, sondern wir müssen sie aus einem früheren mitgebracht haben. Die Mathematik läßt sich nur durch die Präexistenz der Seele erklären. Die mythische Darstellung ist hier deutlich und kann als Bedürfnis betrachtet werden. Das Lernen, der Gewinn der Erkenntnis, sei ein Schöpfen in uns selbst. All das zeigt sich in der Art, wie Platon dies am Beispiel des Gewinns einer einfachen geometrischen Erkenntnis darlegt. Der Mensch hat gewisse Kenntnisse, deren er sich zwar als solcher nicht bewußt ist, die aber gleichwohl in seinem Denken enthalten sind und nur in richtiger Weise zum Bewußtsein gebracht zu werden brauchen, um als Wissen in Kraft zu treten. Der

6. Vgl. auch *Phaidr.* 249c, 249e-250a und *Phaid.* 72e-73a.

Knabe, der nach mathematischen Lehrsätzen gefragt wird, gibt richtige Antworten, obgleich er über die gestellten Fragen noch niemals nachgedacht hat, noch auch von jemand darüber belehrt worden ist. Es ist nur nötig, ihn richtig zu fragen, damit er das Richtige für die Antworten in sich selbst finde. Indem er sich dann aber «erinnert», kommt es heraus, daß er zugleich «lernt». Er findet keineswegs gleich beim ersten Versuch das Richtige. Er geht zunächst auf falsche Voraussetzungen ein. Aber diese läßt er wieder fallen, sobald er einsieht, daß ihre Konsequenzen mit dem Gesuchten nicht übereinstimmen. So entscheidet er sich am Schluß mit voller Sicherheit für das Richtige. Mit dem bloßen Erinnern kann Platon nicht auskommen; er rückt das ζῆτεῖν in den Mittelpunkt; «was du jetzt nicht weißt, das ist, was du nicht erinnerst, mußt du aufsuchen und dich dessen erinnern (86 b)». Die «Wiedererinnerung» erfolgt also nicht schon von selbst; sie bedarf des streng suchenden Denkens. In solcher mythischen Lösung sucht Platon die Frage nach der Herkunft der als *a priori* festgestellten Elemente zu beantworten. Der Fragende lehrt, indem er ihn veranlaßt, sich zu erinnern. In diesem Sinne ist alles Wissen, das wir lernend gewinnen, Wiedererinnerung. An dieser Theorie des Lernens durch «Wiedererinnerung» wird der Gedanke durchaus klar, daß es ein Wissen geben muß, das einen anderen Ursprung hat als den im Einzeldasein der Dinge. Und in diesem Wissen soll die wahre Erkenntnis gegründet werden; sie hat ihren gesicherten Grund in dem, was das Bewußtsein aus sich selbst schöpft, was Platon mythisch «Wiedererinnerung» nennt, was wir wohl in moderner Terminologie als *a priori* bezeichnen dürfen⁷.

7. Siehe auch den Aufsatz von K. Gaiser, *Platons Menon und die Akademie* im Band *Das Problem der ungeschriebenen Lehre Platons*, Wissensch. Buchgesells., Darmstadt 1972, S. 329-393 (hrsg. von J. Wipperfurth).



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δημητρίου Δ. Μούκανου, Προβλήματα τῆς Πλατωνικῆς Φιλοσοφίας τῶν Μαθηματικῶν.

Ἡ πορεία τῆς μελέτης αὐτῆς στηρίζεται σὲ ὀρισμένες τοποθετήσεις τοῦ Πλάτωνα σὲ ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν ὄντολογία τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων καὶ τὴ μέθοδο τῆς εἰδικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν. Μὲ τὴ διάκριση πρακτικῶν καὶ καθαρῶν θεωρητικῶν Μαθηματικῶν, τὴν ὁποία θεμελιώνει ὁ Πλάτων, ἀνοίγεται ὁ δρόμος γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς ὑπαρξῆς τῶν ἰδεῶν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, οἱ ὁποῖες ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸ τοῦ παραδείγματος. Ἐχομε π.χ. στὸ σημεῖο αὐτὸ τὴ σχέση τῆς ἰδέας τοῦ τρία πρὸς τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα εἶναι τρία, ἢ ὁποῖα εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴ σχέση π.χ. τῆς ἰδέας τῆς ωραιότητας πρὸς τὰ ωραῖα πράγματα. Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι γιὰ τὸν Πλάτωνα τὸ καλύτερο παράδειγμα πρὸς θεμελίωση τῆς θεωρίας τῶν ἰδεῶν. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, σὲ ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν προβληματικὴ τῆς μεθόδου τῆς εἰδικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν, ἡ θεωρία τῆς μάθησης ὡς λανθάνουσας ἀνάμνησης στὸν Μένωνα τοῦ Πλάτωνα ἔχει τεράστια ὄντολογικὴ καὶ μεταφυσικὴ σημασία καὶ θεμελιώνει τὸν *a priori* χαρακτῆρα τῶν Μαθηματικῶν. Ὁ Πλάτων δείχνει τὴν παρουσία πάντοτε τῆς θεωρίας τῶν ἰδεῶν στὴν προβληματικὴ τῆς μεθόδου τῆς εἰδικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν. Ἡ πρόθεση τοῦ Πλάτωνα στὸ σημεῖο αὐτὸ ἦταν νὰ δείξει ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ἔχουν μιὰ ἀναλογία πρὸς τὶς ἰδέες καὶ ἐπομένως εἶναι ἀγωγὸς πρὸς ἀλήθειαν.