ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΤΗΤΕΣ (ΜΕΣΟΤΗΤΕΣ): ΟΙ ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗΣ

1. Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Ἡ Πυθαγόρεια σκέψη δομήθηκε μέσα ἀπὸ ἕνα κράμα θρησκευτικῆς πίστης καὶ φιλοσοφίας, διότι ἡ φιλοσοφία τοῦ Πυθαγόρα ὑπῆρξε ἡ φιλοσοφικὴ πραγμάτωση τῆς ὀρφικῆς πίστης.

Ὁ Πυθαγόρας χρησιμοποίησε τὰ Μαθηματικὰ γιὰ νὰ καταφέρει νὰ διεισδύσει στὶς πλέον ὑψηλὲς περιοχὲς τοῦ νοῦ, ἐπιτυγχάνοντας νὰ θεμελιώσει τὴ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη καὶ νὰ τὴν ἀναγάγει σὲ φιλοσοφικὴ θεωρία. Ξέφυγε ἀπὸ μετρήσεις καὶ λογιστικὲς ἐνασχολήσεις. Ἐργάσθηκε σὲ ἐπίπεδα ἰδεῶν. Κατέστη πρωτοπόρος τοῦ μαθηματικοῦ στοχασμοῦ, ἀνακαλύπτοντας νέες μαθηματικὲς ἀρχὲς καὶ θεωρίες μὲ διαχρονικὴ ἐφαρμογή. Συνέδεσε τοὺς ἀριθμούς[1] μὲ ἔννοιες καὶ ποιότητες. Γι᾿ αὐτὸν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἦσαν ἁπλὰ ποσότητες, ἀλλὰ ἀντιπροσώπευαν ἰδέες καὶ ἀρετὲς καὶ μέσω τῶν συσχετίσεών τους ἦταν δυνατὸν ν᾿ ἀναπτυχθεῖ καὶ νὰ βελτιωθεῖ ἡ ἀνθρώπινη ὀντότητα. Οὐσιαστικὰ ἐξομοίωσε ὁλόκληρη τὴ φύση μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὑπέθεσε ὅτι τὰ στοιχεῖα τῶν ἀριθμῶν εἶναι στοιχεῖα ὅλων τῶν ὄντων καὶ ὅλος ὁ κόσμος εἶναι ἁρμονία καὶ ἀριθμός[2]. Ἔδωσε τὸν ὁρισμὸ τῆς ἁρμονίας[3] στὴ μουσικὴ ὡς «κρᾶσις καὶ

---

1. Σύμφωνα μὲ τὴ μαρτυρία τοῦ Συριανοῦ στὸ *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* τοῦ Ἀριστοτέλη, Βιβλίο 13, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀπέδιδαν τὴν ἔννοια συναρμόζω καὶ συνθέτω μὲ τὸ ρῆμα *ἀραρίσκω (ἀπρμφ. ἆρσαι)*, ἀπὸ τὸ ὁποῖο προέρχεται ὁ ἀριθμός.

Γιὰ τοὺς Πυθαγόρειους ἀριθμὸς εἶναι ἡ ὀντότητα ποὺ τὸ τετράγωνό της εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ διπλάσιό της. Ὁ Πρόκλος παρατηρεῖ θαυμάσια στὰ Σχόλιά του στὸν 20ὸ καὶ σὲ ἄλλους ὁρισμοὺς τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδη: «Ἡ δυάδα εἶναι τὸ μέσον ἀνάμεσα στὴ μονάδα καὶ τὸν ἀριθμό, διότι ἡ μονάδα παράγει περισσότερα μὲ τὴν πρόσθεση (1+1=2) παρὰ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ (1Χ1=1), ἐνῶ, ἀντίθετα, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται περισσότερο μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ παρὰ μὲ τὴν πρόσθεση. Ἡ δυάδα εἴτε πολλαπλασιαζόμενη μὲ τὸν ἑαυτό της, εἴτε προστιθέμενη σ᾿ αὐτόν, παράγει ἴση ποσότητα (2Χ2=4 καὶ 2+2=4)».

2. Οἱ Πυθαγόρειοι ἰσχυρίζονταν ὅτι ἡ φύση δημιουργεῖ τὰ αἰσθητὰ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ὄχι τοὺς μαθηματικοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ τοὺς φυσικούς. Μιλώντας συμβολικά, συνήθιζαν νὰ

σύνθεσις ἐναντίων» ὑπονοώντας τὴν ἀριθμητικὴ καὶ τὴν ἁρμονικὴ (ὑπενάντιον) ἀναλογικότητες.

Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι θεωροῦσαν πὼς ἡ ἁρμονία τῆς ψυχῆς, ἡ ἁρμονία τῶν ἤχων καὶ αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ ἁρμονία τοῦ σύμπαντος σχετίζεται μὲ τὸν τέλειο ἀριθμό, τὴν ἱερὴ τετρακτὺν (1+2+3+4=10), τῆς ὁποίας ἐνσαρκωτὲς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4.

Ὅσον ἀφορᾶ στὴ μουσική, ἀνακάλυψαν πὼς οἱ τέλειες ἁρμονίες ἐκφράζονται ὡς ἀριθμητικὲς ἀναλογίες ἀφενὸς μὲν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐνσαρκωτῶν τῆς ἱερᾶς τετρακτύος Δὶς διὰ πασῶν (4:1), Διὰ πασῶν (2:1), Πυθαγόρειος Πέμπτη ἢ Διοξεῖα ἢ Ἡμιόλιος (3:2)[4], Πυθαγόρειος Τετάρτη ἢ Συλλαβὰ

ἐξηγοῦν κάθε ἰδιότητα τῶν αἰσθητῶν μὲ μαθηματικοὺς ὅρους π.χ. ἡ ρήση «ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ» συμβολιζόταν μὲ τὸν ἀριθμὸ 3,14159.

Οἱ Πυθαγόρειοι ἔλαβαν ἀπὸ τὴ θεολογία τοῦ Ὀρφέα τὶς ἀρχὲς τῶν νοητῶν καὶ διανοητικῶν ἀριθμῶν, τοὺς προσέδωσαν πλούσια ἀνάπτυξη καὶ ἐπεξέτειναν τὴν ἐπικράτειά τους μέχρι τὰ ἴδια τὰ αἰσθητά. Ἔτσι δικαιολογεῖται ἡ πυθαγόρεια ρήση «ὅλα τὰ πράγματα ἐξομοιώνονται μὲ τὸν ἀριθμό». Ὁ Πυθαγόρας στὸν Ἱερὸ Λόγο τονίζει μὲ σαφήνεια ὅτι «ἀριθμὸς εἶναι ὁ κυβερνήτης τῶν μορφῶν καὶ τῶν ἰδεῶν καὶ εἶναι ἡ αἰτία θεῶν καὶ δαιμόνων. Γιὰ τὸν ἀρχαιότατο καὶ μὲ τέχνη κυβερνώντα θεὸ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ κανόνας καὶ ὁ τεχνικὸς λόγος καὶ ἡ διάνοια καὶ ἡ μὴ παρεκκλίνουσα ἰσορροπία τῆς σύνθεσης καὶ γένεσης ὅλων τῶν πραγμάτων».

Ὁ Πυθαγόρειος Εὔρυτος καὶ οἱ ὀπαδοί του, θεωρώντας τοὺς ἀριθμοὺς εἰκόνες αὐτῶν καθεαυτῶν τῶν πραγμάτων, ὀρθῶς ἀπέδωσαν ὁρισμένους ἀριθμοὺς σὲ ὁρισμένα πράγματα σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιαιτερότητά τους. Ὡς συνέπεια αὐτοῦ, εἶπε, ἕνας ἰδιαίτερος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὅριο τοῦ φυτοῦ καὶ ἕνας ἄλλος τοῦ ζώου. Ὅπως ὁ μουσικὸς ἐναρμονίζει τὴ λύρα του μέσω μαθηματικῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ἡ φύση μέσω τῶν δικῶν της φυσικῶν ἀριθμῶν διευθετεῖ τὰ πλάσματά της μὲ τάξη καὶ τὰ συνταιριάζει. Διαφορετικὰ πράγματα δὲν χρησιμοποιοῦν τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἀφοῦ εἶναι διαφορετικά, οὔτε τὰ ὅμοια πράγματα χρησιμοποιοῦν διαφορετικὸ ἀριθμό, ἀφοῦ εἶναι ὅμοια.

3. Σύμφωνα μὲ τοὺς παλιοὺς θεωρητικοὺς (ἢ Ἁρμονικούς, ποὺ ὁ Ἀριστείδης Κοϊντιλιανὸς τοὺς ὀνομάζει «οἱ πάνυ παλαιότατοι» Περὶ Μουσικῆς, Mb 21, R. P.W.-I. 18), σήμαινε τὴ διὰ πασῶν (τὴν ὀκτάβα, τὴν ὀγδόη) καὶ τὴ διαφορετικὴ διάταξη τῶν φθόγγων μέσα στὴ διὰ πασῶν ἢ μέσα σ' ἕνα σύστημα μὲ τὰ μέρη του συνδεδεμένα ἔτσι, ποὺ νὰ σχηματίζουν ἕνα τέλειο σύστημα. Αὐτὴ ἦταν, κατὰ τὸν Ἀριστόξενο, ἡ σημασία ποὺ ἔδιναν στὸν ὅρο «Ἁρμονία» πρὶν τὴν ἐποχή του. Βλ. Ἁρμ. Στοιχ. II, 36, 30 Mb: «ἀλλὰ περὶ αὐτῶν μόνον τῶν ἑπτὰ ὀκταχόρδων, ἃ ἐκάλουν ἁρμονίας, τὴν ἐπίσκεψιν ἐποιοῦντο» (ἀλλὰ αὐτοὶ [δηλαδὴ «οἱ πρὸ ἡμῶν», ὅπως ἔλεγε] περιόριζαν τὴν προσοχή τους μονάχα στὰ ἑπτὰ ὀχτάχορδα τὰ ὁποῖα ὀνόμαζαν ἁρμονίες). Ἐπίσης, συγγραφεῖς τοῦ 5ου καὶ τοῦ 4ου αἰώνα π.Χ., ἀνάμεσά στοὺς ὁποίους ὁ Πλάτων, ὁ Ἀριστοτέλης καὶ ὁ Ἡρακλείδης Ποντικός, χρησιμοποιοῦσαν τὸν ὅρο «Ἁρμονία» μὲ τὴν ἴδια σημασία. Μετὰ τὴν ἐποχὴ τοῦ Ἀριστόξενου ὁ ὅρος «διὰ πασῶν» ἀντικατέστησε τὸν ὅρο «Ἁρμονία» σὲ πολλὰ κείμενα (Κλεον. Εἰσ. καὶ Βακχ. Εἰσ. C. v.J. 197 καὶ 308, ἀντίστοιχα: «τοῦ δὲ διὰ πασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά», δηλαδὴ εἴδη ἁρμονίας).

4. Ἡμιόλιος: γενικὰ ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο καὶ τὸ μισὸ τοῦ ὅλου.

ἢ Ἐπίτριτος (4:3)[5] ἀφετέρου δὲ μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων *τοῦ κύβου* («γεωμετρικὴ ἁρμονία»)[6]. Ἐπιβεβαίωσαν μὲ ἀκρίβεια ὅτι μέσα σ' αὐτὴν καθεαυτὴν τὴ φύση τοῦ ἤχου ὑφίσταται μιὰ αὐστηρὴ ἀριθμητικὴ ὀργάνωση εἴτε αὐτὸς παράγεται ἀπὸ ἕνα μουσικὸ ὄργανο, εἴτε ἀπὸ τὸ ἴδιο τὸ Σύμπαν (Μουσικὴ τῶν Σφαιρῶν)[7], διότι ἡ μουσικὴ ἐξέφραζε τὴν ὑφιστάμενη συμπαντικὴ ἁρμονία καὶ ἦταν ἕνα μέσο προσέγγισής της μέσω τοῦ ἴδιου τοῦ κάλλους της.

---

5. Ἐπίτριτος: γενικὰ ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο καὶ ἕνα τρίτο τοῦ ὅλου.

6. Κύβος, ἡ «Γεωμετρικὴ Ἁρμονία»: (Νικόμαχος, ὅ.π. 26,2) «γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις, ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται, πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η', ἐπίπεδα δὲ ϛ'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ϛ' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν». Δηλαδὴ στὸν κύβο προχωρώντας κατὰ τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος κατὰ ἴσα διαστήματα, τὸ ὅλον αὐξάνει κατὰ ἴσα, ἔτσι, ὥστε νὰ συμφωνεῖ μὲ τὸν ἑαυτό του. Στὸν κάθε κύβο διακρίνονται 12 ἀκμές, 8 κορυφὲς καὶ 6 ἕδρες. Οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 12 συνιστοῦν ἁρμονικὴ ἀναλογία, διότι 12/6=(12-8)/(8-6). Στὴν ἐν λόγῳ σειρὰ ἀριθμῶν διακρίνονται ὅλες οἱ μουσικὲς συμφωνίες. Ἡ διὰ τεσσάρων συμφωνία εἶναι ὁ λόγος 8:6, ἐπειδὴ εἶναι ἕνας ἐπίτριτος λόγος. Ἡ διὰ πέντε συμφωνία εἶναι ὁ λόγος 12:8, ἐπειδὴ εἶναι ἕνας ἡμιόλιος λόγος. Ἡ διὰ πασῶν συμφωνία ἐκφράζεται μὲ τὸν λόγο 12:6. Ἡ διὰ πασῶν καὶ ἡ διὰ πέντε συμφωνία δηλαδὴ ἡ 3:1 ἐκφράζεται μὲ τὸ λόγο τῶν διαφορῶν (12-6)/(8-6). Ἡ δὶς διὰ πασῶν συμφωνία εἶναι ὁρατὴ στὸ λόγο 8/(8-6). Βάσει αὐτῶν καταφαίνεται ὅτι σωστὰ ἡ συγκεκριμένη ἀναλογικότητα ὀνομάζεται *ἁρμονικὴ* καὶ τὸ ὅτι τὸν κύβο τὸν ὀνόμαζαν οἱ Πυθαγόρειοι «Γεωμετρικὴ Ἁρμονία».

7. Ὁ Σιμπλίκιος στὰ Σχόλιά του στὸ 2ο βιβλίο τῆς πραγματείας τοῦ Ἀριστοτέλη *Περὶ Οὐρανοῦ* λέει. «Οἱ Πυθαγόρειοι ἔλεγαν ὅτι ἕνας ἁρμονικὸς ἦχος παραγόταν ἀπὸ τὴν κίνηση τῶν οὐρανίων σωμάτων. Ἐπιστημονικὰ τὸ στήριζαν ἀπὸ τὴν ἀναλογία τῶν διαστημάτων τους. Συγκεκριμένα ὁ λόγος 9:8 εἶναι ἐπόγδοος (Ἐπόγδοος: γενικὰ ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο καὶ ἕνα ὄγδοο τοῦ ὅλου). Αὐτὸς ἐκφράζει ἕναν μείζονα τόνο καὶ ἀποδιδόταν στὴ Σελήνη. Ὁ λόγος 12:9 εἶναι ἐπίτριτος καὶ ὁ λόγος 12:8 εἶναι ἡμιόλιος. Οἱ λόγοι αὐτοὶ ἀποδιδόντουσαν στὸν πλανήτη Ἑρμῆ. Ὁ λόγος 16:12 εἶναι ἐπίτριτος καὶ ὁ λόγος 16:8 εἶναι διπλάσιος. Καὶ οἱ δύο λόγοι ἀποδιδόντουσαν στὸν πλανήτη Ἀφροδίτη. Οἱ δύο λόγοι 18:12 ποὺ εἶναι ἡμιόλιος καὶ 18:9 ποὺ εἶναι διπλάσιος ἀποδιδόντουσαν στὸν Ἥλιο. Ὁ λόγος 21:9 εἶναι διπλασιεπίτριτος. Διπλασιεπίτριτος: γενικὰ ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὁλόκληρα καὶ ἕνα τρίτο τοῦ ὅλου) καὶ ἀποδιδόταν στὸν πλανήτη Ἄρη. Οἱ λόγοι 24:18 ποὺ εἶναι ἐπίτριτος, 24:12 ποὺ εἶναι διπλάσιος, 24:8 ποὺ εἶναι τριπλάσιος, 18:12 καὶ 12:8 ποὺ εἶναι ἡμιόλιοι, ἀποδιδόντουσαν ὅλοι στὸν πλανήτη Δία. Οἱ λόγοι 32:24 ποὺ εἶναι ἐπίτριτος, 32:8 ποὺ εἶναι τετραπλάσιος, ἀποδιδόντουσαν στὸν πλανήτη Κρόνο. Οἱ λόγοι, τέλος, 36:24 ποὺ εἶναι ἡμιόλιος, 36:9 ποὺ εἶναι τετραπλάσιος, 24:18 ποὺ εἶναι ἐπίτριτος, ἀποδιδόντουσαν σὲ μιὰ ὀγδόη ἢ σταθερὴ σφαίρα, ποὺ συμπεριελάμβανε ὅλες τὶς ἄλλες.

Αὐτὸς ὁ ἦχος τῶν θεϊκῶν σωμάτων δὲν γινόταν ἀκουστὸς ἀπὸ τὰ γήινα αὐτιά. Ὁ Πυθαγόρας, ὅμως, φαίνεται νὰ εἶχε πεῖ ὅτι ἄκουσε τὴν Οὐράνια ἁρμονία, ἐπειδὴ κατενόησε τὶς ἁρμονικὲς ἀναλογίες στοὺς ἀριθμοὺς τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ τὸ ἠχητικὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ μπορεῖ ν' ἀκουσθεῖ ἀπ' αὐτές.

2. ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΤΗΤΑ 'Η ΑΝΑΛΟΓΙΑ

'Η Μουσικὴ γιὰ τοὺς Πυθαγορείους ἀποτελοῦσε τὴ «Θεωρία τῶν λόγων» καὶ συγκαταλεγόταν ὡς τρίτο μέρος ἀνάμεσα στὰ τέσσερα μέρη ('Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, 'Αστρονομία) τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης[8].

Γιὰ νὰ καταστεῖ κατανοητὸ τὸ θεωρητικὸ μέρος τῆς Μουσικῆς, τῆς 'Αστρονομίας, τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Φιλοσοφίας τοῦ Πλάτωνα καὶ τοῦ 'Αριστοτέλη πρέπει νὰ ὁρισθεῖ ἡ ἔννοια τῆς *ἀναλογικότητας* ἢ *ἀναλογίας*[9]. 'Ο Πρόκλος ὁρίζει τὴν ἀναλογία στὸ *'Υπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιο* ὡς «τὴν ταυτότητα τοῦ λόγου καὶ ὡς τὸν πλέον ὑπέροχο ἐκ τῶν δεσμῶν». «'Αναλογικότητα εἶναι ἡ ἀναγωγὴ δύο ἢ περισσοτέρων λόγων σὲ ἕναν». «'Αναλογικότητα εἶναι ἡ ὅμοια σχέση δύο ἢ περισσοτέρων λόγων, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν δομηθεῖ ἀπὸ τὶς ἴδιες ποσότητες καὶ διαφορές». «Λόγος εἶναι μιὰ ὁρισμένη σχέση μεταξὺ δύο ὅρων, ποὺ παράγει τὸ ἀναλογικὸ ἢ ἀνάλογο καὶ ἡ ἀναλογικότητα προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕνωση λόγων».

'Η ἀναλογικότητα μπορεῖ νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁποιοδήποτε πλῆθος ὅρων μεγαλύτερο τοῦ 3 π.χ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Τέσσερις (4) εἶναι τὸ ἐλάχιστο πλῆθος ἀριθμῶν, ποὺ δομοῦν μιὰ ἀναλογία. 'Εάν, ὅμως, εἰσαχθεῖ στὴν ἀναλογία ὡς ἕνας, τουλάχιστον, ὅρος αὐτῆς ἡ διαφορὰ δύο ὅρων της, τότε τὸ ἐλάχιστο πλῆθος ἀριθμῶν, ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ νὰ δομηθεῖ μιὰ ἀναλογία, περιορίζεται στὸ τρία (3).

Τρεῖς ἀναλογίες, ἡ 'Αριθμητική, ἡ Γεωμετρικὴ καὶ ἡ 'Αρμονικὴ (ἢ 'Υπενάντιος), ἦσαν γνωστὲς στοὺς πιὸ ἀρχαίους Μαθηματικοὺς καὶ οἱ ὁποῖες παρουσιάσθηκαν στὴ φιλοσοφία τοῦ Πυθαγόρα, τοῦ Πλάτωνα καὶ τοῦ 'Αριστο-

---

8. Οἱ Πυθαγόρειοι διαχώριζαν τὴ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη σὲ τέσσερα μέρη. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ μέρη της τὸ ἀπέδιδαν στὸ *πόσα πολλὰ* καὶ τὸ ἄλλο στὸ *πόσο πολύ*. Διαχώριζαν πάλι σὲ δύο τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ δύο μέρη, διότι ἔλεγαν ὅτι τὸ *πόσα πολλὰ* δηλαδὴ μιὰ ποσότητα εἴτε ὑφίσταται αὐτὴ καθεαυτή, εἴτε μελετᾶται σὲ σχέση μὲ κάτι ἄλλο καὶ ὅτι τὸ *πόσο πολὺ* εἴτε εἶναι σταθερό, εἴτε εἶναι σὲ κίνηση. 'Επίσης ἔλεγαν ὅτι ἡ 'Αριθμητικὴ ἐρευνᾶ τὸ *πόσα πολλὰ* ποὺ ὑφίστανται καθεαυτά, ἐνῶ ἡ Μουσικὴ ἐρευνᾶ τὸ *πόσα πολλὰ* ποὺ ὑφίστανται ἀναφορικὰ πρὸς κάτι ἄλλο. 'Η Γεωμετρία μελετᾶ τὸ *πόσο πολὺ* ποὺ εἶναι ἀκίνητο, ἀλλὰ ἡ 'Αστρονομία μελετᾶ τὸ πόσο πολὺ ποὺ εἶναι ἀπὸ μόνο του ἢ κατ' οὐσίαν κινητό.

9. 'Η θεωρία τῶν ἀναλογικοτήτων ἢ τῶν ἀναλογιῶν φαίνεται νὰ πρωτοεισήχθη ἀπὸ τὸν Θαλῆ καὶ μετὰ νὰ ὑπέστη ἀπὸ τοὺς Πυθαγορείους συνεχεῖς βελτιώσεις. Βρῆκε ἐφαρμογὴ στὸν τομέα τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν ("Ιππασος ὁ Μεταποντῖνος, 'Ιπποκράτης ὁ Χῖος), στὴ Μουσικὴ ("Ιππασος ὁ Μεταποντῖνος, Φιλόλαος, 'Αρχύτας ὁ Ταραντῖνος), στὴ Γλυπτικὴ (Πολύκλειτος ὁ 'Αργεῖος), καὶ στὴν 'Ιατρική(!) ('Αλκμαίων, Φιλόλαος).

τέλη[10]. Ἄλλες τρεῖς ἀναλογίες, χωρὶς συγκεκριμένη ὀνομασία, ἀλλὰ ἀναφερόμενες ὡς τέταρτη, πέμπτη καὶ ἕκτη ἀναλογία εἶχαν οἱ Πυθαγόρειοι[11]. Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ Πλάτωνα καὶ τοῦ Ἀριστοτέλη φιλόσοφοι, λόγω τῆς κατὰ τὸν Πυθαγόρα τελειότητας τῆς δεκάδας (1+2+3+4=10), πρόσθεσαν ἄλλες 4 ἀναλογίες[12]. Τελευταία, μιὰ ἑνδέκατη ἀναλογία προστέθηκε ἀπὸ τὸν Τζορντάνο Μπροῦνο.

Πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι στὴν Ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ἀπὸ τὴν ὁποία παράγεται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, *«ἀγνοεῖται ἡ ταυτότητα τοῦ λόγου καὶ ἐξετάζεται μόνον ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων»* ἤ, μὲ ἄλλα λόγια, *«διατηρεῖ τὶς σχέσεις τῶν ὅρων σύμφωνα μὲ τὴν ἰσότητα τῆς ποσότητας, ἀρνούμενη τὴν ὁμοιότητα τοῦ λόγου»*

Στὸν Πίνακα I παρατίθενται οἱ (δέκα+μία) ἀναλογίες γιὰ τὶς ὁποῖες ἔγινε προηγουμένως λόγος.

---

10. Οἱ πρῶτες τρεῖς ἀναλογικότητες (μεσότητες) σύμφωνα μὲ τὸν Ἰάμβλιχο (τέλη 3ου ἀρχὲς 4ου αἰ. μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν ἀπὸ τὸν Πλάτωνα μέχρι τὸν Ἐρατοσθένη.

11. Οἱ τέταρτη, πέμπτη καὶ ἕκτη μεσότητες ἐπενοήθησαν ἀπὸ τοὺς Ἀρχύτα καὶ Ἵππασο τὸν Μεταποντῖνο.

12. Οἱ ἕβδομη, ὄγδοη, ἔννατη καὶ δέκατη ἀναλογικότητες (μεσότητες) ἐπενοήθησαν ἀπὸ τοὺς Μυωνίδη καὶ Εὐφράνορα.

Πίνακας Ι

α/α	Ονομασία Αναλογικότητας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
1	Αριθμητική[13]	$\beta - \alpha = \gamma - \beta$	1, 2, 3
2	Γεωμετρική[14]	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$	1, 2, 4
3	Αρμονική[15]	$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}$	3, 4, 6
4	Τέταρτη	$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}$	3, 5, 6
5	Πέμπτη	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}$	2, 4, 5
6	Έκτη	$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}$	1, 4, 6
7	Έβδομη	$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$	6, 8, 9
8	Όγδοη	$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$	6, 7, 9
9	Έννατη	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$	4, 6, 7
10	Δέκατη[16]	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$	3, 5, 8
11	του Τζορντάνο Μπρούνο	$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$	3, 4, 6

13. Ἡ Ἀριθμητικὴ ἀναλογικότητα μᾶς εἶναι σήμερα γνωστὴ ὡς Ἀριθμητικὴ πρόοδος.

14. Ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογικότητα μᾶς εἶναι σήμερα γνωστὴ ὡς Γεωμετρικὴ πρόοδος.

15. Ἡ Ἁρμονικὴ ἢ Ὑπενάντιος ἀναλογικότητα, ποὺ μᾶς εἶναι σήμερα γνωστὴ ὡς Ἁρμονικὴ πρόοδος, ἀποδίδεται στὸν Ἵππασο τὸν Μεταποντῖνο, ὁ ὁποῖος ἦταν λίγο προγενέστερος τοῦ Φιλολάου.

3. ΜΕΙΖΩΝ ΚΑΙ ΤΕΛΕΙΟΤΑΤΗ[17] ΣΥΜΦΩΝΙΑ[18] (ΑΡΜΟΝΙΑ)

Πρόκειται περὶ μιᾶς σειρᾶς[19] τεσσάρων ἀριθμῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων μπορεῖ νὰ διακρίνει κανεὶς καὶ τὴν ἀριθμητικὴ καὶ τὴ γεωμετρικὴ καὶ τὴν ἁρμονικὴ ἀναλογικότητα, δηλαδὴ τρεῖς συγχρόνως ἀναλογικότητες. Ἔστω γιὰ παράδειγμα ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 9, 12. Ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογικότητα ἐκφράζεται ἀπὸ τοὺς λόγους 12:8=9:6, ποὺ ὁ καθένας τους εἶναι ἡμιόλιος. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογικότητα ἐντοπίζεται μεταξὺ τῶν ζευγῶν τῶν ἀριθμῶν 12, 9 καὶ 9, 6, διότι 12—9=9—6. Ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογικότητα ἐντοπίζεται μεταξὺ τῶν ζευγῶν τῶν ἀριθμῶν 12, 8 καὶ 8, 6, διότι $\frac{12}{6}=\frac{12-8}{8-6}$.

Στὴ σειρὰ αὐτὴ τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 9, 12 ἐντοπίζονται ὅλες οἱ μουσικὲς συμφωνίες. Πράγματι, οἱ σχέσεις 8:6 καὶ 12:9 ἐκφράζουν τὸν ἐπίτριτο λόγο καὶ ταυτόχρονα τὴν διὰ τεσσάρων συμφωνία. Οἱ σχέσεις 9:6 καὶ 12:8 ἐκφράζουν τὸν ἡμιόλιο λόγο καὶ τὴ διὰ πέντε συμφωνία. Ἡ σχέση 12:6 ἐκφράζει τὴ διὰ

---

16. Ἡ δέκατη ἀναλογικότητα εἶναι σήμερα γνωστὴ ὡς ἡ σειρὰ Fibonacci. Στὴ σειρὰ Fibonacci ὁ κάθε ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του ὅρων. Γεννήτορες ἀριθμοὶ στὴ σειρὰ Fibonacci εἶναι οἱ 1, 1, 2. Πράγματι, ἐκτελώντας πράξεις στὴ δέκατη ἀναλογικότητα τῶν Πυθαγορείων προκύπτει: $\beta\gamma-\beta^2=\alpha\gamma-\alpha^2 \Rightarrow \gamma(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha^2=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha) \Rightarrow \gamma=\alpha+\beta$ ο.ε.δ.

17. «...περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας, τῆς ἐν τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης...» κατὰ τὸν Ἰάμβλιχο στὸ «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς».

Λέγεται ὅτι αὐτὴ ἡ ἀναλογία εἶναι εὕρημα τῶν Βαβυλωνίων καὶ ὅτι ὁ Πυθαγόρας τὴν ἔφερε στὴν Ἑλλάδα. Βρίσκονται πολλοὶ Πυθαγόρειοι νὰ τὴν χρησιμοποιοῦν, ὅπως ὁ Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης, ὁ Τίμαιος ὁ Λοκρός, ὁ Φιλόλαος καὶ ὁ Ἀρχύτας οἱ Ταραντῖνοι. Ὁ Πλάτων ἀναφέρεται σ' αὐτὴν τὴν ἀναλογία στὸν Τίμαιο.

18. Συμφωνία: τὸ ταίριασμα δύο φθόγγων, συμφωνία (μὲ τὴν ἔννοια ὄχι τῆς συνήχησης, ἀλλὰ τῆς καλῆς ἁρμονικῆς σχέσης μεταξὺ δύο φθόγγων). Οἱ συμφωνίες ποὺ ἀναγνώριζαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἦταν ἡ «διὰ τεσσάρων» (καθαρὴ τετάρτη), ἡ «διὰ πέντε» (καθαρὴ πέμπτη), ἡ «διὰ πασῶν» (ὀκτάβα), ἡ «δὶς διὰ τεσσάρων» (ὀκτάβα+τετάρτη), ἡ «δὶς διὰ πέντε» (ὀκτάβα+πέμπτη), ἡ «δὶς διὰ πασῶν» (δύο ὀκτάβες), ἡ «τρὶς διὰ τεσσάρων» (δύο ὀκτάβες+τετάρτη), ἡ «τρὶς διὰ πέντε» (δύο ὀκτάβες+πέμπτη). Τὰ διαστήματα αὐτὰ ἐκφραζόντουσαν μὲ τοὺς ἁπλούστερους λόγους.

19. Γενικά, δοθέντων δύο ἀριθμῶν x,y (ἔστω $x<y$) ἰσχύει ἡ πολλαπλὴ ἀνισότητα, ποὺ ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Πυθαγορείους: $x<$ἁρμονικὸς μέσος $<$ γεωμετρικὸς μέσος $<$ ἀριθμητικὸς μέσος $< y$ ἢ

$$x < \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$$

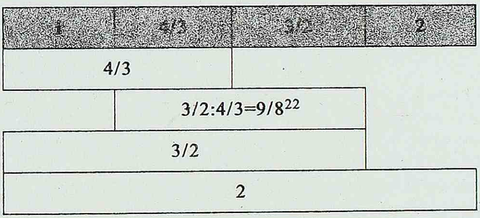
πασῶν συμφωνία. Ἡ σχέση 9:8 ἐκφράζει τὸν ἐπόγδοο[20] τόνο, ποὺ εἶναι τὸ ὅ,τι διαφέρει ἡ διὰ πέντε συμφωνία ἀπὸ τὴ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἢ ὁ ἡμιόλιος λόγος ἀπὸ τὸν ἐπίτριτο λόγο (3/2:4/3 = 9/8).

Τὴν ἐν λόγῳ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν, διαιρώντας μὲ τὸν μικρότερο ἀριθμό, θὰ μπορούσαμε νὰ γράψουμε ὡς

Βήμα 1ο	6	8	9	12
Βήμα 2ο	6/6	8/6	9/6	12/6
Βήμα 3ο	1	4/3	3/2	2

ποὺ ἔτσι ἐκφράζεται ἡ διαστηματικὴ δομὴ τοῦ ὀκτάχορδου μουσικοῦ συστήματος[21].

Θεωροῦμε τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις τοῦ τρίτου βήματος, ὡς «κατὰ σύμβαση» σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων, τὰ ὁποῖα ἤδη ἀνήκουν στὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν (ὀκτάβας), δηλαδὴ στὸ συχνοτικὸ διάστημα [1,2] καὶ ποὺ εἶναι διατεταγμένες σὲ αὔξουσα σειρά. Τὰ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζόμενα μουσικὰ διαστήματα εἶναι τὰ ἑξῆς:



20. Ἐπόγδοος: γενικὰ ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο καὶ ἕνα ὄγδοο τοῦ ὅλου.

21. Τὸ ὀκτάχορδο σύστημα δημιουργήθηκε τὸν 6ο π.Χ. αἰώνα ἀπὸ τὸν Πυθαγόρα μὲ τὴν παρεμβολὴ μιᾶς διάζευξης ἀνάμεσα σὲ δύο συνεχῆ τετράχορδα.
(Νικόμαχος, Ἐγχειρίδιον, 5): «ὅτι τῇ ἑπταχόρδῳ λύρᾳ τὴν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεὶς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἁρμονίας».

22. Ἡ εὕρεση τοῦ μείζονα τόνου ἀποδίδεται στὸν Πυθαγόρα. Ἐπειδὴ στὸ λόγο 9/8 συμμετέχει ὁ ἁρμονικὸς μέσος (8), ὁ λόγος αὐτὸς ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν Νικόμαχο (Ἐγχειρίδιον, ὅ.π. 8) ὡς *ἁρμονικὴ μεσότητα τῆς διὰ πασῶν*.

Στὸν Πίνακα ΙΙ παρατίθενται οἱ συχνοτικὲς σχέσεις ὅλων τῶν μουσικῶν διαστημάτων πού προέκυψαν, τὸ μέγεθός[23] τους σὲ σχέση μὲ τὸ 1/72 τῆς ὀκτάβας[24] ('Αριστόξενος) καὶ οἱ ὀνομασίες μὲ τὶς ὁποῖες αὐτὰ τὰ μουσικὰ διαστήματα εἶναι μέχρι σήμερα γνωστά.

Πίνακας ΙΙ

α/α	Συχνοτικές Σχέσεις	Μέγεθος	Ονομασίες των μουσικών διαστημάτων
1	9/8	12,2346	Μείζων τόνος, Επόγδοος τόνος, Η διαφορά της δια τεσσάρων συμφωνίας από τη δια πέντε συμφωνία.
2	4/3	29,8827	Συλλαβά, Επίτριτος, Πυθαγόρειος Τετάρτη.
3	3/2	42,1173	Πέμπτη, Ημιόλιος, Διοξεία, Δια πέντε τελεία συμφωνία, Πυθαγόρειος πέμπτη.
4	2/1	72,0000	Διαπασών («η δια πασών των χορδών συμφωνία»), Επταφωνία, Οκτάβα.

4. ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ ΣΥΜΦΩΝΙΕΣ (ΑΡΜΟΝΙΕΣ)

Εἶναι δυνατὸν σὲ μιὰ σειρὰ ἀριθμῶν νὰ συνυπάρχουν δύο μόνον ἀναλογικότητες π.χ. εἴτε ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρική, εἴτε ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ ἁρμονική, εἴτε, τέλος, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ἁρμονική.

Συγκεκριμένα (α) στὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 5, 15, 25, 45 ἐνυπάρχουν μόνον ἡ ἀριθμητικὴ (25—5=45—25) καὶ ἡ γεωμετρικὴ $\left(\frac{15}{5}=\frac{45}{15}\right)$ ἀναλογικότητες.

23. Σὲ κάθε μουσικὸ διάστημα ἀντιστοιχοῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν ἔκταση τοῦ μουσικοῦ διαστήματος σὲ κάποιες μονάδες μέτρησης καὶ λέγεται μέγεθος τοῦ διαστήματος. Τὸ μέγεθος τοῦ μουσικοῦ διαστήματος f1/f2 σὲ μονάδες ἑβδομηκοστὰ δεύτερα τῆς ὀκτάβας ('Αριστόξενος) δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση: Μέγεθος=72 log (f1/f2) | log(2).

24. Ἡ συχνοτικὴ σχέση πού ἐκφράζει τὸ 1/72 τῆς ὀκτάβας εἶναι $\sqrt[72]{2}$.

(β) Στὴ σειρὰ τῶν ἀρθμῶν 10, 16, 25, 40 ἐνυπάρχουν μόνον ἡ ἁρμονικὴ $\left(\frac{40}{10}=\frac{40-16}{16-10}\right)$ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ (25—10=40—25) ἀναλογικότητες.

(γ) Στὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 20, 32, 40, 80 ἐνυπάρχουν μόνον ἡ γεωμετρικὴ $\left(\frac{80}{40}=\frac{40}{20}\right)$ καὶ ἡ ἁρμονικὴ $\left(\frac{80}{20}=\frac{80-32}{32-20}\right)$ ἀναλογικότητες.

Τὴν (α) σειρὰ ἀριθμῶν θὰ μπορούσαμε, ὅπως καὶ προηγουμένως, νὰ τὴ γράψουμε ὡς

Βήμα 1ο	5	15	25	45
Βήμα 2ο	5/5	15/5	25/5	45/5
Βήμα 3ο	1	3	5	9

Θεωροῦμε τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις τοῦ τρίτου βήματος ὡς «κατὰ σύμβαση» σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων, τὰ ὁποῖα ὑπερβαίνουν τὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν, δηλαδὴ τὸ συχνοτικὸ διάστημα [1,2]. Μὲ μείωση κατὰ ἀκέραιο πλῆθος διὰ πασῶν, ἀνάγουμε τὰ ἐν λόγῳ μουσικὰ διαστήματα στὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν.

Βήμα 4ο	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2\times 2}$	$\frac{9}{2\times 2\times 2}$
Βήμα 5ο	1	3/2	5/4	9/8

Τοὺς προκύψαντες λόγους κατὰ τὸ 5ο βῆμα, ποὺ ἐκφράζουν πλέον σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων μικροτέρων τῆς διὰ πασῶν, ἀναδιατάσσουμε σὲ αὔξουσα σειρὰ καὶ ὑπολογίζουμε τὰ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζόμενα μουσικὰ διαστήματα.

<table>
<tr><th>1</th><th>9/8</th><th>5/4</th><th>3/2</th></tr>
<tr><td colspan="2">9/8:1=9/8</td><td colspan="2">3/2:5/4=6/5[25]</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">5/4:9/8=10/9</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">9/8:10/9=81/80</td><td colspan="2">6/5:10/9=27/25</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">6/5:9/8=16/15[26]</td><td></td></tr>
</table>

Σχολιάζοντας τὰ παραπάνω ἀποτελέσματα ἔχουμε νὰ ποῦμε ὅτι ἀφενὸς μὲν πρόκειται γιὰ μιὰ διαδικασία ὑποδιαίρεσης σὲ μουσικὰ διαστήματα τῆς διὰ πέντε συμφωνίας (πεντάχορδο σύστημα), ἀφετέρου δὲ στὸν προσδιορισμὸ καὶ ἄλλων μουσικῶν διαστημάτων ἀπὸ τὶς συχνοτικὲς σχέσεις τῶν πρώτων.

Στὸν Πίνακα III παρατίθενται οἱ συχνοτικὲς σχέσεις ὅλων τῶν μουσικῶν διαστημάτων ποὺ προέκυψαν, τὸ μέγεθός τους σὲ σχέση μὲ τὸ 1/72 τῆς ὀκτάβας (Ἀριστόξενος) καὶ οἱ ὀνομασίες μὲ τὶς ὁποῖες αὐτὰ τὰ μουσικὰ διαστήματα εἶναι μέχρι σήμερα γνωστά.

25. Ὁ Μαθηματικὸς Εὐάγγελος Σταμάτης ἀναφέρει ἕναν ἀλγόριθμο (Εἰσαγωγὴ στὴν Γεωμετρία, Θεωρία Ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδη, ΟΕΣΒ, Ἀθήνα 1953, σσ. 14-17) μὲ τὸν ὁποῖο ὁ Ἀρχύτας διαίρεσε τὸ πεντάχορδο σὲ $\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}$.

26. Τὰ διαστήματα 9/8, 10/9, 16/15 δομοῦν ἕνα τετράχορδο, τὸ γνωστὸ *σύντονο διάτονο τοῦ Πτολεμαίου*.

Πίνακας III

α/α	Συχνοτικές Σχέσεις	Μέγεθος	Ονομασίες των μουσικών διαστημάτων
1	81/80[27]	1,2904	Κόμμα, Διδύμειον κόμμα, Σύντονο κόμμα, Η διαφορά ενός ελάσσονα τόνου (10:9) από ένα μείζονα τόνο (9:8), Η διαφορά ενός Πυθαγορείου λείμματος (256:243) από ένα διατονικό ημιτόνιο (16:15).
2	16/15	6,7039	Διατονικό ημιτόνιο, Φυσικό ημιτόνιο, Μείζον ημιτόνιο του Διδύμου, Ελάχιστος τόνος, Επιπεντεκαιδέκατος.
3	27/25	7,9943	Ελάχιστος τόνος, Μέγα λείμμα.
4	10/9	10,9442	Ελάσσων τόνος, Ελάσσων τόνος του Διδύμου, Επιένατος.
5	9/8	12,2346	Μείζων τόνος, Επόγδοος τόνος, Η διαφορά της δια τεσσάρων συμφωνίας από τη δια πέντε συμφωνία.
6	6/5	18,9385	Υπολειπόμενον μείζονος τρίτης (5:4) καθ' ύφεσιν (25:24), Ελάσσων Τρίτη του Αρχύτα, Η δια τριών μικρά τελεία συμφωνία, Τρίτη μικρή, Επίπεμπτος.
7	5/4	23,1788	Υπερτερούν ελάσσονος τρίτης (6:5) κατά δίεσιν (25:24), Επιτέταρτος, Μείζων Τρίτη του Αρχύτα, Τρίτη μεγάλη, Τρίτη μεγάλη χρωματική, Δια τριών μείζων τελεία συμφωνία, Δίτονον.
8	3/2	42,1173	Πέμπτη, Ημιόλιος, Διοξεία, Δια πέντε τελεία συμφωνία, Πυθαγόρειος πέμπτη.

27. Ἀναφέρεται ἀπὸ τὸ Βοήθειο (De Institutione Musica, Λειψία 1867, III, 276) ὅτι προσπαθώντας ὁ Φιλόλαος νὰ κατακερματίσει τὸν τόνο δημιούργησε τὸ κόμμα ἀπὸ τὴ διαφορὰ (ἀποτομὴ-δίεση).

Τὴ (β) σειρὰ ἀριθμῶν θὰ μπορούσαμε, κατὰ τὰ γνωστά, νὰ τὴ γράψουμε ὡς:

Βήμα 1ο	10	16	25	40
Βήμα 2ο	10/10	16/10	25/10	40/10
Βήμα 3ο	1	8/5	5/2	4

Θεωροῦμε τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις τοῦ τρίτου βήματος ὡς «κατὰ σύμβαση» σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων κάποια ὑπερβαίνουν τὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν, δηλαδὴ τὸ συχνοτικὸ διάστημα [1,2]. Μὲ μείωση κατὰ ἀκέραιο πλῆθος διὰ πασῶν, ἀνάγουμε τὰ δύο τελευταῖα μουσικὰ διαστήματα στὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν.

Βήμα 4ο	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{2\times 2}$	$\frac{4}{2}$
Βήμα 5ο	1	8/5	5/4	2

Τοὺς προκύψαντες λόγους κατὰ τὸ 5ο βῆμα, ποὺ ἐκφράζουν πλέον σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων μικροτέρων τῆς διὰ πασῶν, ἀναδικτάσσουμε σὲ αὔξουσα σειρὰ καὶ ὑπολογίζουμε τὰ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζόμενα μουσικὰ διαστήματα.

<table>
<tr><td>1</td><td>5/4</td><td>8/5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">5/4</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">8/5:5/4=32/25=
=9/8X256/225</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">2/1:8/5=5/4</td></tr>
<tr><td colspan="4">2</td></tr>
</table>

Σχολιάζοντας τὰ παραπάνω ἀποτελέσματα ἔχουμε, ὅπως καὶ προηγουμένως, νὰ ποῦμε ὅτι ἀφενὸς μὲν πρόκειται γιὰ μιὰ διαδικασία ὑποδιαίρεσης σὲ μουσικὰ διαστήματα τῆς διὰ πασῶν συμφωνίας, ἀφετέρου δὲ στὸν προσδιορισμὸ καὶ ἄλλων μουσικῶν διαστημάτων ἀπὸ τὶς συχνοτικὲς σχέσεις τῶν πρώτων.

Στὸν Πίνακα IV παρατίθενται οἱ συχνοτικὲς σχέσεις ὅλων τῶν μουσικῶν διαστημάτων ποὺ προέκυψαν, τὸ μέγεθός τους σὲ σχέση μὲ τὸ 1/72 τῆς ὀκτάβας (Ἀριστόξενος) καὶ οἱ ὀνομασίες μὲ τὶς ὁποῖες αὐτὰ τὰ μουσικὰ διαστήματα εἶναι μέχρι σήμερα γνωστά.

Πίνακας IV

α/α	Συχνοτικές Σχέσεις	Μέγεθος	Ονομασίες των μουσικών διαστημάτων
1	256/243	5,4135	Πυθαγόρειον λείμμα, Το έλαττον ημιτόνιον, Ύφεση ελάσσονος τόνου, Λείμμα.
2	135/128	5,5307	Μεγαλύτερο λείμμα, Λείμμα, Αποτομή ελάσσονος τόνου (μείζων τόνος-ελάχιστος τόνος 9/8:16/15=135/128), Η διαφορά λείμματος από τον ελάσσονα τόνο (10/9:256/243=135/128), Οξεία δίεσις, Χρωματικόν ημιτόνιον.
3	10/9	10,9442	Ελάσσων τόνος, Ελάσσων τόνος του Διδύμου, Επιένατος.
4	9/8	12,2346	Μείζων τόνος, Επόγδοος τόνος, Η διαφορά της δια τεσσάρων συμφωνίας από τη δια πέντε συμφωνία.
5	256/225	13,4078	Ελαττωμένη μικρά τρίτη.
6	5/4	23,1788	Υπερτερούν ελάσσονος τρίτης (6:5) κατά δίεσιν (25:24), Επιτέταρτος, Μείζων Τρίτη του Αρχύτα, Τρίτη μεγάλη, Τρίτη μεγάλη χρωματική, Δια τριών μείζων τελεία συμφωνία, Δίτονον.
7	8/5	48,8212	Υπολειπόμενον μείζονος (έκτης) καθ' ύφεσιν (27/16:135/128=8/5), Έκτη μικρά, Επιτριμερής, Η δια εξ μικρά τελεία συμφωνία.
8	27/16	54,3519	Πυθαγόρειον μείζον, Πυθαγόρειος έκτη.
9	2/1	72,0000	Διαπασών («η δια πασών των χορδών συμφωνία»), Επταφωνία, Οκτάβα.

Τὴ (γ) σειρὰ ἀριθμῶν θὰ μπορούσαμε καὶ πάλι κατὰ τὰ γνωστὰ νὰ τὴ γράψουμε ὡς:

Βήμα 1ο	20	32	40	80
Βήμα 2ο	20/20	32/20	40/20	80/20
Βήμα 3ο	1	8/5	2	4

Ὅπως καὶ στὶς δύο προηγούμενες περιπτώσεις, θεωροῦμε τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις τοῦ τρίτου βήματος ὡς «κατὰ σύμβαση» σχέσεις μουσικῶν διαστημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων κάποια ὑπερβαίνουν τὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν, δηλαδὴ τὸ συχνοτικὸ διάστημα [1,2]. Μὲ μείωση τοῦ τελευταίου μουσικοῦ διαστήματος κατὰ δύο διὰ πασῶν, ἐπιτυγχάνουμε τὴν ἀναγωγὴ ὅλων τῶν μουσικῶν διαστημάτων στὴν ἔκταση μιᾶς διὰ πασῶν.

Βήμα 4ο	1	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{4}{2}$
Βήμα 5ο	1	8/5	2	2

Τοὺς προκύψαντες ἀπὸ τὸ 5ο βῆμα λόγους ἀναδιατάσσουμε σὲ αὔξουσα σειρὰ καὶ ὑπολογίζουμε τὰ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζόμενα μουσικὰ διαστήματα.

<table>
<tr><td>1</td><td>8/5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">8/5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2/1:8/5=5/4</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">8/5:5/4=32/25
(9/8X256/225)</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td></tr>
</table>

Σχολιάζοντας, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὰ παραπάνω ἀποτελέσματα, ἔχουμε νὰ ποῦμε ὅτι πρόκειται γιὰ μιὰ διαδικασία ὑποδιαίρεσης τῆς διὰ πασῶν συμφωνίας σὲ μουσικὰ διαστήματα, τῶν ὁποίων οἱ συχνοτικὲς σχέσεις, τὰ μεγέθη καὶ οἱ ὀνομασίες ἐμφανίζονται στὸν Πίνακα IV, ἐπειδὴ ἤδη ἔχουν μελετηθεῖ στὴν περίπτωση (β).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἰάμβλιχος, «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς», Ἐκδόσεις: H. Pistelli, Leibzig, 1984.

«Πυθαγορικὸς Βίος», Μετάφραση Σταυρούλας Λαμπροπούλου, Ἐκδόσεις Λυρικὸς Κόσμος, Ἀθήνα, 1982.

«Τὰ θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς», Μετάφραση Ἰωαννίδη & Φωτόπουλου, Ἐκδόσεις Σφίγγος, Ἀθήνα, 1977.

Πλάτων, «Τίμαιος», Μετάφραση Παύλου Γρατσιάτου, Ἀθήνα, 1911, Βιβλιοθήκη Φέξη Ἀρχαίων Ἑλλήνων Συγγραφέων.

Στοβαῖος, Στοβαίου Ἀνθολόγιον, Τόμος Α', Ἐκδόσεις Τολίδη, 1986.

Thomas Taylor, Ἡ Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ τῶν Πυθαγορείων, Μετάφραση Μαρία Οἰκονομοπούλου, Ἐκδόσεις ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Ἀθήνα 1995.

Szabo, A., «Ἀπαρχαὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν», Ἔκδοση Τ.Ε.Ε., 1973.

Εὐάγγελος Σ. Σταμάτης, Ἀριθμητικὸς ὁρισμὸς τοῦ Εὐκλείδου, ἡ μουσικὴ ἀναλογία καὶ ὁ Ἰάμβλιχος, Ἀνατ. «Πλάτων», 1978.

«Ἑλληνικὰ Μαθηματικά», Ἑταιρείας τῶν φίλων τοῦ Λαοῦ, Ἀθήνα, 1976.

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Μιὰ εἰσαγωγὴ στὴ Φυσικὴ τῆς Μουσικῆς, Ἐκδόσεις Ὑπηρεσίας Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., 1985.

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Μουσικὴ Ἀκουστική, Ἐκδόσεις Ὑπηρεσίας Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., 1990.

Χ. Θ. Μωυσιάδης & Χ. Χ. Σπυρίδης, Ἐφαρμοσμένα Μαθηματικὰ στὴν ἐπιστήμη τῆς Μουσικῆς, Ἐκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1994.

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομὴ Κανόνος, Ἐκδόσεις Γεωργιάδης, Ἀθῆναι, 1996.

SUMMARY

H. C. SPYRIDIS, «"Pythagorian Proportionales": The Generators of Ancient Greek Musical Intervalic Theory».

Pythagorean thought was structured through a mixture of religious belief and philosophy. Pythagoras utilized mathematics to penetrate the highest mental abilities, managing to lay the foundations of mathematical science and advance it to philosophical status. Pythagoras and his followers believed that the harmony of the soul, the harmony of sounds, and the harmony of the universe itself are related to the «perfect number», the holy tetractis (1+2+3+4=10) the representatives of which are the numbers 1, 2, 3, and 4. They discovered that the perfect harmonies are expressed as arithmetic proportionalities between the representative numbers of the holy tetractis, disdiapason (4:1), diapason (2:1), diapente (3:2), and diatessaron (4:3). They precisely verified that in the very nature of the sound there exists a strict arithmetic structure, whether the sound is produced by a musical instrument or it is produced by the universe itself (music of the spheres). For the Pythagorians, music constituted the «harmony of ratios» and it was the third of the four mathematical science components (arithmetic, geometry, music, astronomy). Ancient Greek mathematicians and philosophers devised ten proportionalities three of which, i.e. the arithmetic, the geometric and the harmonic are frequently encountered in the philosophy of Pythagoras, Plato and Aristotle. The intervalic structure of the musical harmonies (diapason, diapente, diatessaron) results from the study of the major and minor symphonies (i.e. series of four numbers among which one can distinguish the arithmetic and/or geometric and/or harmonic proportionalities).

X. X. Σ.