ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ «*ΠΕΡΙ ΓΕΝΕΣΕΩΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ*» (*ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ 35α1-36β6*)

1. Να λυθεί το πρόβλημα «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου», το οποίο αναφέρει ο Πλάτων στον Τίμαιο (35a1-36b6).

1.1.1 Το μουσικό χωρίο 35a1-36b6

τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν
αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου
φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταὐτὸν συναρμόττων βίᾳ.
μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν,
πάλιν ὅλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσῆκεν διένειμεν, ἑκάστην
δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην.
ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς
μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ
τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης,
τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς
τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ'
ἑπτακαιεικοσιπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνε-
πληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας
ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε
ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ
μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν
δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.

ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.

1.1.2 Απόδοση στη νεοελληνική

Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο. Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητας και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία.

Έχοντας φτιάξει λοιπόν ένα μείγμα από τρία συστατικά, το διένειμε ξανά σε όσα κομμάτια έπρεπε —το καθένα από αυτά τα κομμάτια αποτελείτο και από την Ταυτότητα και από τη Διαφορά και από την Ουσία—. Άρχισε να διαιρεί το μείγμα ως εξής: πρώτα αφαίρεσε ένα κομμάτι [1x] από το σύνολο του μείγματος, κατόπιν αφαίρεσε ένα δεύτερο κομμάτι διπλάσιο από το πρώτο [2x], το τρίτο κομμάτι ήταν μιάμιση φορά το δεύτερο και τριπλάσιο του πρώτου [3x], το τέταρτο διπλάσιο του δευτέρου [4x], το πέμπτο τριπλάσιο του τρίτου [9x], το έκτο οκταπλάσιο του πρώτου [8x] και το έβδομο ήταν είκοσι εφτά φορές το πρώτο [27x].

Έπειτα συμπλήρωσε τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα κομμάτια της πρώτης διαιρέσεως, με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε κάθε διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός μέσος] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός μέσος] απέχει εξ ίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί δημιούργησαν τμήματα $3/2$ (ημιόλια), $4/3$ (επίτριτα) και $9/8$ (επόγδοα) με τα αρχικά διαστήματα. Συμπλήρωσε όλα τα επίτριτα διαστήματα ($4/3$) με επόγδοα διαστήματα ($9/8$), αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα $256/243$ (λείμμα ή έλασσον ημιτόνιο). Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει τα κομμάτια αυτά.

(Βασίλης Κάλφας, *Πλάτωνος Τίμαιος*)

1.2 Η μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος.

Το χωρίο 35a1-36b6 του Τιμαίου, γνωστό και ως «μουσικό χωρίο», αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου, διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Στην παρούσα εργασία θα εκτεθεί αναλυτικά και με την πρέπουσα τεκμηρίωση η λύση του προβλήματος «*περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου*», η οποία αφορά στη χρήση Δωρίων τετραχόρδων (τόνος-τόνος-λείμμα) κατά την κατιούσα διαδοχή.

Προς τούτοις, ως απαραίτητη προϋπόθεση τίθεται ο αναγνώστης να γνωρίζει ωρισμένες Πυθαγόρειες και Πλατωνικές φιλοσοφικές αρχές καθώς επίσης ωρισμένες θεμελιώδεις Πυθαγόρειες μαθηματικές και μουσικές έννοιες.

Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον* αναφέρει ότι ο Πλούταρχος στο έργο του *περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας* σχολιάζει το χωρίο 35a1-36b6 του Πλατωνικού *Τιμαίου*. Το χωρίο αυτό είναι ένα από τα πλέον δύσκολα ως προς την κατανόησή του μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο. Στο εν λόγω χωρίο ο Πλάτων αναφέρει το πώς εδημιουργήθη η Ψυχή του Κόσου. Ο Πλάτων με το μουσικό χωρίο, συνεχίζει ο Πρόκλος (*Πρόκλου εις τον Τίμαιον* Γ 174D 23-175D 5), έχει σκοπό να διδάξει στους «ακροατές» του Μαθηματικά για να γυμνάσουν τη διάνοιά τους, να συνδυάσουν τα όσα πολλά έχουν ακούσει από αυτόν και, αποκλείοντες τις αντιλογίες, να μάθουν να εξετάζουν το αληθές. Σε αντιπαράθεση με την *κατατομή του κανόνος*[1] των Πυθαγορείων, ο Πλάτων θα τους διδάξει την *κατατομή της Ψυχής* με βάση τη θεωρία των λόγων ή αναλογιών ή μεσοτήτων. Θα τους διδάξει τους πολλαπλασίους λόγους, τις μεσότητες[2] ανάμεσά τους, τους επιτρίτους και τους ημιολίους λόγους, που εμφανίζονται ανάμεσα σε αυτές τις μεσότητες και τον τρόπο που αυτοί οι λόγοι συμπληρούνται με επόγδοα διαστήματα και λείμματα[3]. Από τους μαθητές του, που θα ασχοληθούν με τη λύση του προβλήματος, άλλοι θα τοποθετήσουν τα αριθμητικά δεδομένα

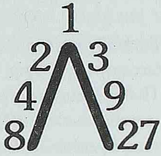
---

1. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ κανόνος κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2005.

2. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Ο δυϊσμός του Μουσικού Διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2004.

3. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2005, σσ. 406-407.

επ' ευθείας γραμμής, όπως κάνει ο Θεόδωρος, αναμειγνύοντας αρτίους με περιττούς αριθμούς και άλλοι, όπως λ.χ. κάνουν ο Άδραστος και ο Κράντωρ[4], θα τα τοποθετήσουν λαβδοειδώς, βάζοντας επί του ενός σκέλους τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του Λ τη μονάδα (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

Θα διδάξει τον τρόπο να διπλασιάζουν, να τριπλασιάζουν και, γενικώς, να πολλαπλασιάζουν αριθμούς προκειμένου ανάμεσά τους να χωρούν επίτριτοι, ημιόλιοι, επόγδοοι αριθμοί. Θα διδάξει την αριθμητική αναλογία και την υπενάντιό της, το ημιτόνιο, το λείμμα και, εμμέσως, την αποτομή και θα καταλήξει σε μια δομή αποτελούμενη από 24 επογδόους τόνους, 9 λείμματα και δύο αποτομές.

Ας ξεκινήσουμε με την εις βάθος μελέτη του «μουσικού χωρίου».

Ο Πλάτων ρητά αναφέρει:

> τῆς ἀμερίστου
> καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
> γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
> οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
> ἑτέρου,
> (35a1-5)

[Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο].

> καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
> αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν
> αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου

---

4. Ο Πλούταρχος (1027 E 9) υπονοεί ότι ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών για τη λύση του προβλήματος.

φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταὐτὸν συναρμόττων βίᾳ.
μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν
(35a5-b1)

[Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητος και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία].

Τα λόγια αυτά του Πλάτωνος ωδήγησαν τους ερμηνευτές του σε πάρα πολλές διαφορετικές ερμηνευτικές εκδοχές. Αξίζει πάντως να αναφέρουμε ότι άλλοι προσανατολίζονται στην άποψη του Ξενοκράτους και άλλοι στην άποψη του Κράντορος από τους Σόλους της Κιλικίας[5]. Συγκεκριμένα ο Κράντωρ θεωρεί την ψυχή μείγμα και της νοητής φύσεως και της σχετικής με τα αισθητά. Από την άλλη μεριά ο Ξενοκράτης[6] υποστηρίζει ότι η ουσία της ψυχής είναι ο ίδιος ο αριθμός, που από μόνος του κινείται[7]. Ότι από την ανάμειξη της αμερούς και της μεριστής ουσίας προκύπτει ο αριθμός.

Εκείνο που εγώ επισημαίνω είναι ότι στα αποσπάσματα του χωρίου (35a1-5) και (35a5-b1) παρουσιάζονται δύο πανομοιότυπες διαδικασίες αναμείξεως δύο πραγμάτων, προκειμένου να προκύψει κάποιο τρίτο. Γιατί;

Μελετώντας την Αριθμητική των Πυθαγορείων βρίσκουμε στην *Αριθμητική εισαγωγή* του Νικομάχου του Γερασηνού το εξής απόσπασμα:

Πάλιν δὲ ἐξ ἀρχῆς, ἐπεὶ τοῦ ποσοῦ τὸ
μὲν ὁρᾶται καθ' ἑαυτό, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν

---

5. Κράντωρ, Έλληνας φιλόσοφος της αρχαίας Ακαδημίας, που ήκμασε τον Γ' π.Χ. αι. Υπήρξε μαθητής του Ξενοκράτους στην Αθήνα. Εθαύμαζε τον Όμηρο και τον Ευριπίδη. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Κράντωρ υπήρξε ο πρώτος ερμηνευτής του Πλάτωνος (*Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον*, i, σ. 76, 1-2, Diehl).

6. Ξενοκράτης ο Χαλκηδόνιος, γεννήθηκε στη Χαλκηδόνα το 394 π.Χ. και πέθανε το 314 στην Αθήνα. Υπήρξε εκ των πρώτων μαθητών του Πλάτωνος και το 339 διεδέχθη τον Σπεύσιππο στη διεύθυνση της Ακαδημίας, στην οποία εδίδαξε επί μία εικοσιπενταετία. Ως φιλόσοφος δεν είχε μεγάλη αξία. Συνήθιζε να ερμηνεύει τις αντιλήψεις του Πλάτωνος βάσει των Πυθαγορείων τύπων. Αλλά, ενώ ο Πλάτων τοποθετεί τους αριθμούς ως ενδιάμεσο μεταξύ των φθαρτών πραγμάτων και των ιδεών, ο Ξενοκράτης τα τοποθετεί όλα επί του ιδίου επιπέδου. Ο Ξενοκράτης θεωρείται πρόδρομος του νεοπλατωνισμού.

7. Αριθμός εκ του ρήματος αραρίσκω (συνάπτω, ενώνω, συναρμόζω, βάλλω μαζί) και της προστακτικής ίθι του ρήματος είμι (ελθέ, ύπαγε), που σημαίνει ταιριάζω και προχωρώ με σταθερό βήμα, συνενώνω και προχωρώ με σταθερό βήμα.

ἔχον, οἷον ἄρτιον, περιττόν, τέλειον, τὰ ἐοικότα, τὸ δὲ πρὸς ἄλλο πως ἤδη ἔχον καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον σχέσει ἐπινοούμενον, οἷον διπλάσιον, μεῖζον, ἔλαττον, ἥμισυ, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, τὰ ἐοικότα, δῆλον ὅτι ἄρα δύο μέθοδοι ἐπιλήψονται ἐπιστημονικαὶ καὶ διευκρινήσουσι πᾶν τὸ περὶ τοῦ ποσοῦ σκέμμα, ἀριθμητικὴ μὲν τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτό, μουσικὴ δὲ τὸ περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο.

Νικομάχου του Γερασηνού, Αριθμητική εισαγωγή, 1, 3, 1, 1-9 και 1, 3, 2, 1.

[Πάλι για να ξεκινήσουμε από την αρχή, επειδή του ποσού το μεν ένα μέρος παρατηρείται καθεαυτό και δεν έχει καμία σχέση με το άλλο, όπως άρτιο[8]*, περιττό*[9]*, τέλειο και τα όμοια, το δε άλλο μέρος είναι σχετικό με κάτι και νοείται μαζί με τη σχέση του με κάποιο άλλο πράγμα, όπως διπλάσιο, μεγαλύτερο, μικρότερο, μισό, ημιόλιο (3/2), επίτριτο (4/3) και τα όμοια, είναι φανερό ότι δύο επιστημονικές μέθοδοι θα επιληφθούν και θα διευκρινίσουν με όλη την έρευνα σχετικά με το ποσόν. Η αριθμητική μεν για το απόλυτο ποσόν και η μουσική για το σχετικό].*

Ευάγγελος Σπανδάγος, *Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδόσεις Αίθρα, σελ. 172.

Βασιζόμενος στο απόσπασμα αυτό, δέχομαι ότι η μία ανάμειξη αφορά στην Αριθμητική και η άλλη στη Μουσική, την επιστήμη των λόγων.

Όσον αφορά στην Αριθμητική, από τους Πυθαγορείους γνωρίζουμε ότι:

1. Αριθμός[10] είναι η οντότης της οποίας το γινόμενον με τον εαυτόν της δίδει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του αθροίσματος με τον εαυτόν της, δηλαδή

$$x \cdot x > x + x \Rightarrow x^2 > 2x.$$

2. Ο Θέων ο Σμυρναίος στο έργο του «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*» αναφέρει: «*Η μονάδα είναι η αρχή όλων των πραγμάτων και κυρίαρχη όλων... Από αυτήν όλα εκπορεύονται και η ίδια*

---

8. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

Ευκλείδου, *Στοιχείων ζ*.

9. Περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

Αυτόθι.

10. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Αυτόθι.

δεν απορρέει από τίποτα. Είναι αδιαίρετη και είναι σε πλήρη ισχύ. Είναι αναλλοίωτη και δεν εξέρχεται ποτέ από την καθαρή φύση της με πολλαπλασιασμό, δηλαδή $1 \times 1 = 1$».

Η **μονάς**[11] ωνομάζετο από τους Πυθαγορείους **νους**. Η μονάς είναι γεννήτωρ των περιττών αριθμών. Ο περιττός αντιστοιχεί στο αρσενικό. Στη Γεωμετρία η μονάς εκφράζει το σημείο και στη Φιλοσοφία αντιστοιχεί στο «**ταυτόν**» (αμερές, αμετάβλητο), δηλαδή την ομοιότητα – ταυτότητα[12].

Η **δυάς** είναι το μέσον ανάμεσα στο **πλήθος**, δηλαδή τον αριθμό και στη **μονάδα**, διότι, είτε πολλαπλασιαζομένη με τον εαυτό της, είτε προστιθεμένη εις αυτόν, παράγει ίδια ποσότητα, δηλαδή $2 \times 2 = 2 + 2$.

Για τους Πυθαγορείους η δυάς είναι αιτία της ανομοιότητος, στερείται μορφής, γι' αυτό και χαρακτηρίζεται «*δυάς απροσδιόριστος*». Είναι γεννήτωρ των αρτίων αριθμών, πηγή κάθε συμφωνίας, εξ ού και «αρμονία» (2: 1 διάστημα διαπασών ή οκτάβας). Στη Γεωμετρία η δυάς είναι η φύση της ευθείας (ή πλευράς), η αρχή του μήκους. Στη Φιλοσοφία εκφράζει το «**θάτερον**» (μεριστό) δηλ. την ετερότητα, διαφορετικότητα[13].

Η **τριάς** είναι για τους Πυθαγορείους ο πρώτος αριθμός, επειδή $3 \times 3 > 3 + 3$. Ο Θέων γράφει: «*Είναι ο πρώτος αριθμός που έχει αρχή, μέση και τέλος... και στον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη λέξη πλήθος*». Η τριάς είναι επίσης ο πρώτος εν ενεργεία περιττός αριθμός και προκαλεί τη δύναμη της μονάδος να προχωρήσει σε ενέργεια και επέκταση.

Στη Γεωμετρία η τριάς εκφράζει τη φύση του επιπέδου, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο και το τρίγωνο είναι η αρχή όλων των σχημάτων. Στον *Τίμαιο* η τριάς αντιστοιχεί στην «**ουσία**», την ανάμειξη δηλαδή του «**ταυτού**» με το «**θάτερον**».

Με αυτήν την ανάμειξη ο Πλάτων κατασκευάζει τα κύρια εργαλεία για τη δημιουργία της Ψυχής του Κόσμου, που είναι οι αριθμοί[14], οι εκφραστές της

---

11. Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
Αυτόθι.

ἔστι γὰρ ποσόν τι ἡ μο-
νὰς καὶ καθ' ἑαυτό γε θεωρούμενον καὶ μονώτατον περαῖνον
καὶ ἀληθῶς ὁρίζον·
Νικομάχου, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής* 21, 19-21

12. Νικόμαχος ο Γερασηνός «*Αριθμητική Εισαγωγή*», σελ. 267 (μτφ) και Πλούταρχος «*Περί της εν Τιμαίω ψυχογονίας*» 1024D, σελ. 147 (μτφ)].

13. ἑτερότητος γὰρ πρωτίστη ἔννοια ἐν δυάδι·
Νικομάχου, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής* 21, 22

14. Αρίστανδρος και Νουμήνιος (ανάμειξη του 1, ως αμερίστου, και του 2, ως μεριστής, προέκυψε ο αριθμός, το 3, κ.λπ.)

ποσότητος και, κατ' επέκταση, κατασκευάζει το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα[15] με βάση τη δεκάδα[16], την οποία οι Πυθαγόρειοι μεταξύ των άλλων ονομάτων,

---

ὅ γα μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο
μὲν ἴδια εἴδη, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἀμ-
φοτέρων μειχθέντων ἀρτιοπέριττον· ἑκατέρω δὲ τῶ
εἴδεος πολλαὶ μορφαί, ἃς ἕκαστον αὐταυτὸ σημαίνει.
Φιλόλαος, *Σπαράγματα*, Σπάραγμα 5, 1-4.

15. Διὰ τί πάντες ἄνθρωποι, καὶ βάρβαροι καὶ Ἕλληνες,
εἰς τὰ δέκα καταριθμοῦσι, καὶ οὐκ εἰς ἄλλον ἀριθμόν, οἷον
β, γ, δ, ε, εἶτα πάλιν ἐπαναδιπλοῦσιν, ἓν πέντε, δύο πέντε,
ὥσπερ ἕνδεκα, δώδεκα; οὐδ' αὖ ἐξωτέρω παυσάμενοι τῶν
δέκα, εἶτα ἐκεῖθεν ἐπαναδιπλοῦσιν; ἔστι μὲν γὰρ ἕκαστος τῶν
ἀριθμῶν ὁ ἔμπροσθεν καὶ ἓν ἢ δύο, καὶ οὗτος ἄλλος τις,
ἀριθμοῦσι δ' ὅμως ὁρίσαντες ἄχρι τῶν δέκα. οὐ γὰρ δὴ ἀπὸ
τύχης γε αὐτὸ ποιοῦντες φαίνονται καὶ ἀεί· τὸ δὲ ἀεὶ καὶ
ἐπὶ πάντων οὐκ ἀπὸ τύχης, ἀλλὰ φυσικόν. πότερον ὅτι
τὰ δέκα τέλειος ἀριθμός; ἔχων γὰρ πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ
εἴδη, ἄρτιον περιττόν, τετράγωνον κύβον, μῆκος ἐπίπεδον,
πρῶτον σύνθετον. ἢ ὅτι ἀρχὴ ἡ δεκάς; ἓν γὰρ καὶ δύο
καὶ τρία καὶ τέτταρα γίνεται δεκάς. ἢ ὅτι τὰ φερόμενα
σώματα ἐννέα; ἢ ὅτι ἐν δέκα ἀναλογίαις τέτταρες κυβι-
κοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται, ἐξ ὧν φασὶν ἀριθμῶν οἱ Πυθα-
γόρειοι τὸ πᾶν συνεστάναι; ἢ ὅτι πάντες ὑπῆρξαν ἄνθρωποι
ἔχοντες δέκα δακτύλους; οἷον οὖν ψήφους ἔχοντες τοῦ οἰκείου
ἀριθμοῦ, τούτῳ τῷ πλήθει καὶ τἆλλα ἀριθμοῦσιν. μόνοι δὲ
ἀριθμοῦσι τῶν Θρᾳκῶν γένος τι εἰς τέτταρα, διὰ τὸ ὥσπερ
τὰ παιδία μὴ δύνασθαι μνημονεύειν ἐπὶ πολύ, μηδὲ χρῆ-
σιν μηδενὸς εἶναι πολλοῦ αὐτοῖς.
Αριστοτέλης, *Προβλήματα*, Bekker, σελ. 910b γραμ. 23 - σελ. 911a, γραμ. 4

16. ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΟΣ

Ο τεχνικός (δημιουργικός) Νους (=θεός) αποτελείωσε την κατασκευή και σύσταση του Κόσμου και όλων όσων ευρίσκονται εντός του Κόσμου σύμφωνα με ένα τέλειο και απόλυτο παράδειγμα, το οποίο αναφέρεται στις ομοιότητες και τις εξομοιώσεις του αριθμού. Επειδή, όμως, ήταν αόριστο και απέραντο (άνευ πέρατος- με τη μαθηματική σημασία της λέξεως-) το πλήθος όλων των όντων, που ήσαν εντός του Κόσμου, η με αριθμούς απαρίθμηση του συνόλου αυτών των όντων δεν ήταν ευκολονόητη, ούτε μπορούσε και να περιγραφεί με τη χρήση κάποιου επιστημονικού παραδείγματος, εχρειάζετο συμμετρία προκειμένου ο τεχνίτης θεός υπερισχύσει και επικρατήσει πλήρως κατά τη δημιουργία επί των έμπροσθέν του κειμένων όρων και μέτρων. Δια της συμμετρίας επέτυχε να συγκροτήσει το Σύμπαν ούτως, ώστε να μη παρουσιάζει ούτε έλλειψη, ούτε πλεόνασμα, δηλαδή ούτε να το περιορίσει και να έχει ανάγκες, ούτε και να περιπέσει σε περισσεύματα.

Φυσική ταυτότητα βάρους και συμμετρία και συμπλήρωση εντός της δεκάδος υπήρχε σε μέγιστο βαθμό. Πράγματι, η δεκάς περιλαμβάνει εν είδει σπέρματος (στοιχειωδώς) εντός της τα πάντα, δηλαδή τα στερεά και τα επίπεδα, και τα άρτια και τα περιττά και τα αρτιοπέριττα και τα τέλεια με κάθε τρόπο και τα πρώτα και ασύνθετα και την ισότητα και την ανισότητα,

---

τις δέκα σχέσεις, και τα διαμετρικά (=επίπεδα, ευθύγραμμα) και τα σφαιρικά και τα κυκλικά, καμμία ξεχωριστή ή εκ φύσεως άλλη διαφορά καθεαυτή δεν έχει εκτός από την ικανότητα να έρχεται αιφνιδίως κατά του εαυτού της και να τον ανακυκλώνει. Αυτό κατ' εύλογον τρόπο εχρησιμοποιήθη, αφού η δεκάς προσαρμόσθηκε ως όργανο δια του οποίου μετρώνται όλα και ως γνώμων και όργανο ευθυγραμμίσεως προς το υπόδειγμα αυτής. Δια τούτο ακριβώς σύμφωνα με τους λόγους της δεκάδος προσαρμόζονται και καθ' ολοκληρίαν και κατά μέρη όλα όσα υπάρχουν από τον ουρανό μέχρι τη γη και τακτοποιούνται σύμφωνα με αυτήν. Δια τούτο και την επωνόμαζαν θεολογώντας οι Πυθαγορικοί άλλοτε μεν κόσμον (=ευταξία), άλλοτε δε ουρανόν, άλλοτε δε το παν, άλλοτε δε ειμαρμένη και αιώνα και κράτος και πίστη και Ανάγκη και Άτλαντα και ακάμαντα (=ακούραστη) και θεόν με ψιλή προσωδία και Φάνητα -πρόκειται για μυστική θεότητα που εικονίζει την αρχέγονη ύλη- και ήλιο. Εδόθησαν οι ονομασίες αυτές στη δεκάδα διότι κατά τα μέρη αυτής εττακτοποιήθησαν τα πάντα του Κόσμου και κατά την ολότητά τους και κατά τα μέρη τους. Και από τον κανόνα ότι πρόκειται για τον τελειότατον αριθμό. Εκ τούτου η δεκάς τρόπον τινά δεχάς (εκ του δέχομαι με τα δέκα δάκτυλα των δύο χεριών), όπως ακριβώς ο ουρανός είναι δοχείο του σύμπαντος κόσμου.

Εκ του ουρανού ωνόμασαν και τη μούσα Ουρανία. Ωνομάσθη ΠΑΝ, διότι είναι φυσικός αριθμός (πιθανώς με την έννοια του ακεραίου από το φυσικόν χύμα, που είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών) και δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από αυτόν, αλλά και εάν κάποιος επινοείται, επιστρέφει και ανακυκλούται σε αυτόν (υπονοείται το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, που όλοι οι αριθμοί παράγονται από τη βάση του αριθμητικού συστήματος, που είναι ο αριθμός δέκα). Διότι η εκατοντάδα ισούται με δέκα δεκάδες και η χιλιάδα ισούται με δέκα εκατοντάδες και η μυριάδα ισούται με δέκα χιλιάδες και ο καθένας άλλος αριθμός με τον ίδιο τρόπο ή εις αυτήν (την δεκάδα) ή εις κάποιον άλλον αριθμόν εντός αυτής, γυρίζοντας προς τα οπίσω, ανακυκλούται. Εις αυτήν καταλήγει η ανάλυση των πάντων και η παντός είδους επιστροφή. Ακόμη η δεκάδα καλείται ΠΑΝ από τον λεγόμενο Πάνα· κατά την δεκάδα και αυτός τιμάται, διότι μετά την πάροδο δέκα μηνών εορτάζεται από δέκα κατηγορίες ανθρώπων, αυτούς που διαμένουν στους αγρούς, από τους ποιμένες γενικώς, τους αιγοβοσκούς, τους βουκόλους, τους εκτρέφοντες άλογα, τους πολεμιστές, τους κυνηγούς, τους αλιείς, τους κηπουρούς, τους ξυλοκόπους, που αυτοί κατασκευάζουν βωμούς προς τιμήν του. Και λέγεται ότι δέκα είδη οικόσιτων ζώων διαμένουν μαζί με τον άνθρωπο ο σκύλος, η όρνιθα, το βόδι, ο ίππος, ο όνος, ο ημίονος, η χήνα (ή πάπια), η αίγα, το πρόβατο, η γάτα.

....

Την αποκαλούσαν την δεκάδα κράτος, διότι συμβαίνει και να ενισχύει και να συγκρατεί τα ανήκοντα στον Κόσμο και φαίνεται ότι η δεκάς εξουσιάζει όλους τους άλλους αριθμούς και ως προς την ονομασία σαν οχυρό και περίφραξη από παντού κλειστή και δοχείο και γι' αυτόν τον λόγο εκαλείτο και κλειδούχος, διότι αποτελούσε το άθροισμα των αριθμών μέχρι το τέσσερα ($1+2+3+4=10$).

ΑΝΑΤΟΛΙΟΣ

Το δέκα γεννάται με πολλαπλασιασμό αρτίου επί περιττόν αριθμόν ($2X5=10$). Είναι κύκλος και πέρας κάθε αριθμού. Γύρω από το δέκα περιστρέφονται και επανέρχονται οι αριθμοί, όπως ακριβώς κινούνται στο στάδιο γύρω από την παρακαμπτήριο κυκλική γραμμή. Επί πλέον είναι όρος, που εκφράζει την απειρία των αριθμών.

Καλείται δε κράτος και παντέλεια, διότι πάντοτε περατώνει τον αριθμό λόγω του ότι εμπεριέχει κάθε φύση, δηλαδή και του αρτίου και του περιττού και του κινουμένου και του ακινήτου και του αγαθού και του κακού.

την αποκαλούσαν **ΚΟΣΜΟ**. Η δεκάς, ο τελειότατος αριθμός, περιλαμβάνει εν σπέρματι εντός της τα πάντα, δηλαδή τα στερεά[17] και τα επίπεδα[18], τα άρτια και τα περιττά και τα αρτιοπέριττα, τα τέλεια με κάθε τρόπο, τα πρώτα και ασύνθετα, την ισότητα και την ανισότητα.

Η άλλη η ανάμειξη υποστηρίζω, στηριζόμενος στα γραφόμενα υπό του Μιχαήλ Ψελλού, αναφέρεται στη μουσική, την επιστήμη των λόγων, με την έννοια των αναλογιών, δια της οποίας ο Πλάτων θα συσχετίσει μεταξύ τους τα μέρη του συνόλου, δηλαδή του ΚΟΣΜΟΥ, προκειμένου να μπορέσει να τα κατατάξει αρμονικά, ώστε ο ΚΟΣΜΟΣ να είναι πράγματι ένα στολίδι. Δηλαδή ο τεχνικός (δημιουργικός) Νους (=θεός, η λέξη ως επίθετο και όχι ως ουσιαστικό) θα ολοκληρώσει την κατασκευή και σύσταση του Κόσμου και όλων, όσων ευρίσκονται εντός του Κόσμου, σύμφωνα με ένα τέλειο και απόλυτο γεωμετρικό[19] σχέδιο, το οποίο αναφέρεται στις ομοιότητες και τις εξομοιώσεις του αριθμού και θα εγκαταστήσει μαθηματική τάξη δια των αναλογιών, δηλαδή δια των λόγων, μειώνοντας την εντροπία ενός σύμπαντος ανάρχου και ατάκτου κατά την ακόλουθο ρήση των Πυθαγορείων:

«Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὴν συμμετρίαν
καὶ συμμετρία ἦν ὁ λόγος»

Αυτή η ανάμειξη γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἡ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδές πως συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἡ δὲ ἁρμονικὴ τὴν ταὐτότητα, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα

Μιχαήλ Ψελλός, Γεωργίου του Κεδρηνού Σύνοψις Ιστοριών, τόμος XI, έτος 1058.

Ακόμη το δέκα προκύπτει από το άθροισμα των πρώτων αριθμών της τετρακτύος, 1, 2, 3, 4, και το είκοσι παίρνοντας δύο φορές αυτούς τους αριθμούς. Το δέκα γεννά ακόμη τον πέντε και τον πενήντα, που περιέχουν αξιοθαύμαστα κάλη.

Προέρχεται από την πρόσθεση των όρων της σειράς του διπλασίου 1, 2, 4, 8 (το άθροισμά τους είναι 15) και από την πρόσθεση των όρων της σειράς του τριπλασίου 1, 3, 9, 27 (το άθροισμά τους είναι 40). Τα δύο αθροίσματα αυτών των αριθμών που μνημονεύει και ο Πλάτων στη ψυχογονία, προστιθέμενα δίδουν άθροισμα 55 (5+5=10).

....

Ιαμβλίχου, Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής, Περί Δεκάδος.

17. Εννοεί τους τρισδιαστάτους αριθμούς $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, οι οποίοι, αναλόγως της σχέσεως μεταξύ των α, β και γ φέρουν τα ονόματα πληνθίδες, δοκίδες, κύβοι κ.λπ.

18. Εννοεί τους δισδιαστάτους αριθμούς $\alpha \cdot \beta$, οι οποίοι, αναλόγως της σχέσεως μεταξύ των α και β φέρουν τα ονόματα προμήκεις, ετερομήκεις, τετράγωνοι κ.λπ.

19. Βλέπε Αντίστροφα και Σπυρίδεια Δικτυωτά στο Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2006, σσ. 156-161.

...τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ

Πλάτωνος *Τίμαιος* (35 a, 1-6)

Κατά το απόσπασμα (35a5-b1) ανέμειξε την ουσία του ταυτού, (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του ετέρου (μεριστού, μεταβλητού) και εδημιούργησε τρίτη ουσία σε σχέση πάλι με την φύση του ταυτού και του θατέρου. Επειδή στα *Θεολογούμενα της Αριθμητικής* του Ιαμβλίχου με την έννοια **σύνθεσις** υπονοείται η πράξη της προσθέσεως και με την έννοια **ανάμειξις** υπονοείται η πράξη του πολλαπλασιασμού, πολλαπλασιάζοντας, λοιπόν, ο θεός την ουσία του ταυτού, δηλαδή τον αρμονικό μέσο, επί την ουσίαν του θατέρου, δηλαδή τον αριθμητικόν μέσο, εδημιούργησε την τρίτη ουσία, η οποία τιθεμένη ανάμεσα στις δύο προηγούμενες ουσίες, δομεί μία συνεχή αναλογία ως ακολούθως:

$$\frac{2xy}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2}=xy=\left(\sqrt{xy}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{2xy}{x+y}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow$$

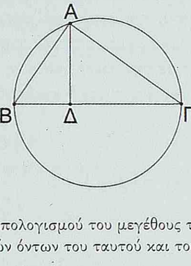
$$\Rightarrow \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{\text{γεωμετρικός μέσος}}=\frac{\text{γεωμετρικός μέσος}}{\text{αριθμητικός μέσος}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ}}{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}=\frac{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}{\text{ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ}}$$

Ποιά είναι η τρίτη ουσία και τί σημαίνει η ανωτέρω μαθηματική διαδικασία; Η τρίτη ουσία είναι ο γεωμετρικός μέσος $\left(\sqrt{xy}\right)$ κατά τον Μιχαήλ Ψελλό. Ο γεωμετρικός μέσος είναι υψωμένος εις το τετράγωνο, γεγονός που μας οδηγεί στις εξής σκέψεις: Κατά την Πλουτάρχειο διαδικασία υπολογισμού του αριθμητικού μέσου δύο δοθέντων φυσικών αριθμών[20], αυτός υπό προϋποθέσεις είναι φυσικός αριθμός. Κατά την Ευδώρειο διαδικασία υπολογισμού του αρμονικού μέσου δύο

20. Αυτόθι (Βλέπε κεφάλαιο 13.3.2.3.6).

δοθέντων φυσικών αριθμών[21], και αυτός υπό προϋποθέσεις είναι φυσικός αριθμός. Ο γεωμετρικός μέσος, ως αποτέλεσμα εξαγωγής τετραγωνικής ρίζης, ενδέχεται να μην είναι φυσικός αριθμός· να είναι λ.χ. ασύμμετρος αριθμός. Ο γεωμετρικός μέσος μπορεί να υπολογισθεί γεωμετρικώς με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων (Βλέπε σχήμα 2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Δ είναι η προβολή της κορυφής Α επί της υποτεινούσης ΒΓ, ισχύει η σχέση $(ΑΔ)^2=(ΒΔ)\cdot(ΔΓ)$. Εάν, λοιπόν, ληφθεί το μήκος ΒΔ ίσο προς τον αρμονικό μέσο (ταυτόν) των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, το μήκος ΔΓ ίσο προς τον αριθμητικό μέσο (θάτερον) αυτών, τότε το μήκος ΑΔ θα είναι ίσο προς τον γεωμετρικό μέσο (ουσία)[22] τους. Κατόπιν όλων αυτών, είναι δυνατόν σε μία διαδικασία κατατομής κανόνος επί του μάνικου εγχόρδου οργάνου να τεθούν τάστα στις πρέπουσες θέσεις και για το ταυτόν και για το θάτερον και για την ουσία.



Σχήμα 2: Γεωμετρικός τρόπος υπολογισμού του μεγέθους της ουσίας δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, γνωστών όντων του ταυτού και του θατέρου αυτών.

Τώρα ο Πλάτων διαθέτει ένα υλικό, τους αριθμούς, τους οποίους θα ταξινομήσει και θα συσχετίσει με βάση τις αναλογίες, διότι ταξινομών το υλικό του, το καθιστά κτήμα του.

Εν συνεχεία ο Πλάτων παρουσιάζει την κατανομή των μερών του μείγματος βάσει ενός αλγορίθμου και θέτει το μαθηματικό – αρμονικό πρόβλημα, το οποίο καλούμεθα να επιλύσουμε. Προκειμένου να κατανοήσουμε τη λειτουργία του εν λόγω αλγορίθμου, θα αντιμετωπίσουμε το Πλατωνικό πρόβλημα κατ' αρχάς με βάση την Άλγεβρα σε συνδυασμό με τα Μαθηματικά της Πυθαγορείου μουσικής (1.2.1) και στη συνέχεια σύμφωνα με τα αρχαιοελληνικά μαθηματικά (1.2.2).

Αφού ανακάτεψε το μεριστόν με το αμέριστον και με την ουσία και, αφού από τρία έκανε ένα, μοίρασε[23] ξανά το σύνολο αυτό στα κατάλληλα μερίδια, που

21. Αυτόθι (Βλέπε κεφάλαιο 13.3.2.3.6).

22. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο Πυθαγόρειος Πλάτων δεν ομιλεί περί του απηγορευμένου ασυμμέτρου αριθμού, αλλά, απλά, τον υποδεικνύει επί του γεωμετρικού σχήματος.

23. Ο Πρόκλος γι' αυτήν την ενέργεια διερωτώμενος (Πῶς δὲ μοίρας ἀφαιρεῖν τῆς

το καθένα τους ήταν μείγμα από το ταυτό, το θάτερο και την ουσία. Άρχισε το μοίρασμα με τις εξής επτά ενέργειες:

> ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαιεικοσιπλασίαν τῆς πρώτης·
> (35 b4-c2)

1. Αφήρεσε (ο Δημιουργός) από το όλον (το μείγμα) ένα μέρος (x),
2. μετά αφήρεσε το διπλάσιο αυτού (2x),
3. μετά αφήρεσε ένα κομμάτι μιάμιση φορά το δεύτερο, δηλαδή τριπλάσιο του πρώτου (3x),
4. μετά αφήρεσε ένα κομμάτι διπλάσιο του δευτέρου (4x),
5. μετά αφήρεσε το τριπλάσιο του τρίτου (9x),
6. μετά αφήρεσε ένα κομμάτι οκταπλάσιο του πρώτου (8x) και
7. μετά αφήρεσε ένα κομμάτι εικοσιεπταπλάσιο του πρώτου (27x).

Από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος προκύπτουν οι αλγεβρικοί παράγοντες του Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Οι αλγεβρικοί παράγοντες από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος.

1x	2x	3x	4x	9x	8x	27x
1x	2x	3x	2^2x	3^2x	2^3x	3^3x
			Τετράγωνοι[24] αριθμοί		*Κύβοι*[25] αριθμοί	

ἀμερίστου κατ' οὐσίαν;) επισημαίνει: Τούτο σημαίνει ότι το υλικό από την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας είναι μεριστό. Ο δημιουργός εδόμησε την ψυχή σε ένα όλον προτού αρχίσει να τη διαιρεί. Έτσι, λοιπόν, δεν χάνεται η ολότητα καθώς υφίστανται τα μέρη της, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει και να προηγείται των μερών της. 199 D9-13.

24. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. Ευκλείδου, *Στοιχείων* ζ.

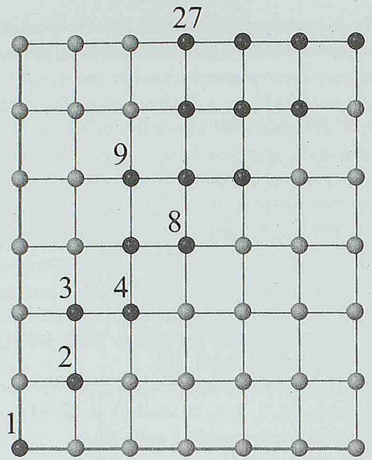
25. Κύβος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. Αυτόθι.

Πρόκειται για τους επτά αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, που, όπως παρετήρησαν αρχαίοι σχολιαστές με πρώτον τον Κράντορα, δομείται από τη συνένωση της γεωμετρικής σειράς 1, 2, 4, 8 με πρώτο όρο τη μονάδα και γενήτορα το 2 και της γεωμετρικής σειράς 1, 3, 9, 27 με πρώτο όρο τη μονάδα και γενήτορα το 3. Η παρατήρηση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική και χαρακτηρίζει από παλιά όλα τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, με την έννοια ότι ένα μουσικό διάστημα χαρακτηρίζεται ως Πυθαγόρειο[26] μόνον, όταν εκφράζεται ως γινόμενο δυνάμεων με βάση το 2 ή/και το 3, δηλαδή με τη μορφή $2^{\varkappa} \cdot 3^{\lambda}$ $\varkappa, \lambda \in Z$.

Σχολιάζοντας τη σειρά με την οποία παρουσιάζει ο Πλάτων τους αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, δηλαδή πρώτα τη μονάδα, μετά το 2, μετά το 3, μετά τα τετράγωνα του 2 και του 3 και μετά τους κύβους αυτών – καταλήγομε ότι αυτή συνηγορεί υπέρ:

- της ενεργείας των μαθητών του Πλάτωνος, του Αδράστου και του Κράντωρος, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, να τοποθετούν λαβδοειδώς τους αριθμούς, δηλαδή να βάζουν επί του ενός σκέλους τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του Λ τη μονάδα (Σχήμα 1).
- του ισχυρισμού του Πλουτάρχου (1027 Ε 9) ότι ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών για τη λύση του εν λόγω προβλήματος.
- της δηλώσεως του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ».
- της επινοήσεως των αντιστρόφων δικτυωτών και του Σπυριδείου δικτυωτού από τον καθορισμό των αποδεκτών κόμβων του οποίου[27] προκύπτει αφενός μεν η μεγίστη τετρακτύς, η λεγομένη τετρακτύς του Πλάτωνος, αφετέρου δε η λαβδοειδής τοποθέτηση των όρων της (Σχήμα 3).

26. Αυτόθι (Βλέπε Κεφάλαιο 3.1.1).
27. Αυτόθι (Κεφάλαιο 13.2).



Σχήμα 3: Ο καθορισμός των ορίων της Ψυχής του Κόσμου με τους όρους της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος.

Θα μπορούσε να διερωτηθεί κανείς γιατί ο Πλάτων σταματά στους επτά όρους της μεγάλης τετρακτύος και δεν προχωρεί παρακάτω. Ο κ. Βασίλης Κάλφας, καθηγητής της Φιλοσοφίας στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, ισχυρίζεται ότι το σύστημα αυτών των αριθμών δεν είναι κλειστό και θα μπορούσε να επεκταθεί και παραπέρα. Επειδή αυτό το σύστημα θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την περιγραφή του πλανητικού μας συστήματος, λέει ο κ. Κάλφας, ο Πλάτων σταματά στους επτά όρους, παραπέμποντας στους επτά πλανήτες[28].

---

28. Κατά τη φιλοσοφική μέθοδο των Πυθαγορείων σχετικά με τους αριθμούς (Βλέπε Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Βιβλίο Τρία, Κεφάλαιο XVI, εκδόσεις ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, μτφπ. Μ. Οικονομοπούλου, Αθήνα) «Λένε ότι ο ουρανός περιβάλλεται από επτά κύκλους, που τα ονόματά τους είναι αρκτικός, ανταρκτικός, καλοκαιρινός τροπικός, χειμερινός τροπικός, ισημερινός, ζωδιακός και, πέραν αυτών, ο γαλαξίας... Οι πλανήτες, μια στρατιά που προχωρά σε μια πορεία αντίθετη από εκείνη των απλανών αστέρων, κατατασσόμενοι σε επτά τάξεις, συνδέονται πολυτρόπως με τον αέρα και τη γη... Η ψυχή επίσης διαιρείται σε επτά μέρη, δηλαδή τις πέντε αισθήσεις, το φωνητικό όργανο και την παραγωγική δύναμη». «Ο Θέων ο Σμυρναίος (*Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*) λέει πως ο Πλάτωνας, ακολουθώντας τη φύση, συγκροτεί την ψυχή από επτά αριθμούς, τους 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27».

Ο συγγραφεύς της μετά χείρας εργασίας έχει την εντελώς αντίθετη άποψη, λαμβάνοντας υπ' όψη του τα λεγόμενα του Αδράστου (Θέων Σμυρναίος 64.1) και τη θεωρία περί των αντιστρόφων δικτυωτών και ιδιαιτέρως του Σπυριδείου δικτυωτού. Ισχυρίζεται δηλαδή ότι ο Πλάτων με τις δύο τετρακτύες αριθμών (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) προσπαθεί αφενός μεν να διδάξει τα περί των αριθμών του δεκαδικού συστήματος, αφετέρου δε να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών –την Ψυχή του Κόσμου-, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι λύσεις του προβλήματός του. Το πεδίο αυτό των τιμών είναι η τριγωνικής μορφής περιοχή του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις[29]

$$\varphi(x)=2^x \quad x=0,\ 1,\ 2,\ 3...\ \text{και}\ \varrho(y)=3^y \quad y=0,\ 1,\ 2,\ 3...$$

Στο Σπυρίδειο δικτυωτό το συγκεκριμένο πεδίο τιμών περικλείεται από τους δύο στοίχους κόμβων [1,1] και [1,2][30].

Θα μπορούσε ο Πλάτων να χρησιμοποιήσει είτε ολιγοτέρους (1, 2, 4 και 1, 3, 9), είτε περισσοτέρους (1, 2, 4, 8, 16 και 1, 3, 9, 27, 81) από επτά αριθμούς, προκειμένου να αποσαφηνίσει το εν λόγω πεδίο τιμών;

Θεωρητικώς, θα μπορούσε. Πρακτικώς, στην πρώτη περίπτωση θα έχανε πληροφορία σχετική με τους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος, αφού δεν θα εμφανίζονται οι κυβικοί αριθμοί $8=2^3$ και $27=3^3$· στη δεύτερη περίπτωση θα είχε πλεονάζουσα πληροφορία για τους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος, αφού για δεύτερη φορά θα εμφανίζονται οι τετράγωνοι αριθμοί ($16=4^2$) και ($81=9^2$)ή μάλλον θα εμφανίζονται στερεοί αριθμοί των τεσσάρων διαστάσεων –άνευ εποπτικού και, συνεπώς, διδακτικού χαρακτήρος, αφού δεν είναι εφικτό να παρασταθούν σε χώρο τριών διαστάσεων, που αντιλαμβάνονται οι αισθήσεις μας- [$16=4^2=(2^2)^2=2^4$ και $81=9^2=(3^2)^2=3^4$]. Ο ισχυρισμός του συγγραφέως επικεντρούται στο ότι ο Πλάτων με τις δύο τετρακτύες αριθμών (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) επιτυγχάνει χωρίς καθόλου πλεονασμό (redundancy, κατά τη Θεωρία Πληροφοριών)

- να διδάξει τα περί των αριθμών του δεκαδικού συστήματος,
- να περιχαρακώσει το πεδίο τιμών, εντός του οποίου ευρίσκονται οι λύσεις του προβλήματός του (η Ψυχή του Κόσμου)
- να δομήσει μουσική «*κατατομή κανόνος*» εύρους δύο δις διαπασών, ενός δια πέντε και ενός επογδόου.

Ο συγγραφεύς επίσης πιστεύει ότι με τους επτά αριθμούς της μεγίστης τετρακτύος -και μόνον- το εν λόγω Πλατωνικό πρόβλημα έχει λύση ή λύσεις

29. Βλέπε Κεφάλαιο 13.2, σχήμα 13.5.
30. Αυτόθι (Κεφάλαιο 4.3.1).

με συγκεκριμένη φυσική σημασία. Μεταξύ του πρώτου (1) και του τελευταίου αριθμού (27) της μεγίστης τετρακτύος εμπεριέχεται ένα μουσικό εύρος ίσο προς $\frac{\log\left(\frac{27}{1}\right)}{\log 2} = 4{,}75$ διαπασών[31]. Αυτό είναι το μουσικό εύρος (δύο δις διαπασών ή τέσσερις διαπασών, ένα δια πέντε και ένας επόγδοος τόνος[32]) που εκφράζει η λύση του Πλατωνικού προβλήματος, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια.

Αυτό θα έπρεπε εκείνη την εποχή να ήταν το εύρος του ηχητικού υλικού για τα μουσικά γεγονότα[33]. Πράγματι, τότε η μουσική ακολουθούσε πιστά τον λόγο, την ομιλία, το μέλος, χωρίς περιττά στολίδια, σε απόσταση το πολύ ενός διατεσσάρων, δηλαδή ενός τετραχόρδου από αυτόν.

Σήμερα δεχόμεθα ως κάτω συχνοτικό όριο, δηλαδή ως χαμηλότερο μουσικό ύψος, για την ανθρώπινη φωνή τα 82,7 Hz και ως άνω συχνοτικό όριο, δηλαδή ως υψηλότερο μουσικό ύψος, γι' αυτήν τα 1174,7 Hz. Συνολικά δεχόμεθα ένα συχνοτικό εύρος ίσο με $\frac{\log\left(\frac{1174{,}7}{82{,}7}\right)}{\log 2} = 3{,}83$ διαπασών (οκτάβες). Προσθέτοντας ένα τετράχορδο εκατέρωθεν αυτού του συχνοτικού εύρους για την όποια μουσική συνοδεία, προκύπτει συχνοτικό εύρος 4,66 διαπασών[34], πολύ κοντά στο Πλατωνικό συχνοτικό εύρος των 4,75 διαπασών.

Στη μέχρι στιγμής δομή με βάση την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος εμφανίζονται διπλάσια και τριπλάσια διαστήματα (Σχήμα 4).

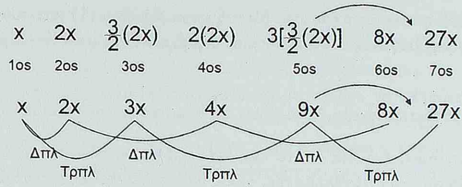
---

31. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2005, σ. 412.

32. $\left(\frac{2}{1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) = \left(\frac{27}{1}\right)$

33. Ο Άδραστος κατά τον Θέωνα τον Σμυρναίο θεωρεί ότι ο Πλάτων επεξέτεινε το διατονικό γένος σε υπερβολικά μεγάλη έκταση, έχοντας υπ' όψη του τη φύση του ανθρώπου. Πράγματι, έξω από αυτή την έκταση ούτε οι διαγωνιζόμενοι μουσικοί εκτελεστές θα μπορούσαν να παραγάγουν ήχους, αλλά ούτε και οι ακροατές τους θα μπορούσαν να τους ακούσουν και να τους εκτιμήσουν.

34. $\frac{\log\left(\frac{1174{,}7}{82{,}7}\right)}{\log 2} + \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\log 2} = 3{,}83 + 0{,}83 = 4{,}66$ διαπασών.



Σχήμα 4: Δομή των διπλασίων και των τριπλασίων διαστημάτων.

Ο Πλάτων μας παραγγέλλει (35c2-36a5) τα διπλάσια[35] και τα τριπλάσια[36] διαστήματα να τα συμπληρώσουμε με τις αρμονικές και τις αριθμητικές μεσότητες.

> μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. (35c2-36a5)

Αυτή η διαδικασία υλοποιείται ως εξής για τα διπλάσια (Πίνακας 2) και τα τριπλάσια (Πίνακας 3) διαστήματα:

Πίνακας 2: Υπολογισμός του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου για τα διπλάσια διαστήματα.

		1x		2x		4x		8x
αρμονικός μέσος			$\frac{4}{3}x$		$\frac{8}{3}x$		$\frac{16}{3}x$	
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$		$\frac{3}{2}x$		3x		6x	

35. Με τον τρόπο αυτό ο Πλάτων δημιουργεί μια μουσική αναλογία (*η μουσική αναλογία δομείται με την τοποθέτηση ανάμεσα σε δύο διπλασίους αριθμούς του αρμονικού και του αριθμητικού τους μέσου*), δηλαδή δομεί μια διαπασών Πυθαγορείου δομής (δύο διεζευγμένα τετράχορδα ή αλλιώς τετράχορδο + επόγδοος τόνος + τετράχορδο).

36. Με τον τρόπο αυτό θα λέγαμε ότι ο Πλάτων δημιουργεί μια «μουσική αναλογία»

Πίνακας 3: Υπολογισμός του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου για τα τριπλάσια διαστήματα.

		1x	3x	9x	27x
αρμονικός μέσος	$\alpha = 3\gamma \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{3}$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{9}{2}x$	$\frac{27}{2}x$	
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$	2x	6x	18x	

Με την προσθήκη των αριθμητικών και των αρμονικών μεσοτήτων έχομε 15 όρους, οι οποίοι δημιουργούν ημιόλια, επίτριτα και επόγδοα διαστήματα, όπως φαίνεται στη δομή του σχήματος 5:

4:3 4:3 4:3 4:3 4:3 4:3 4:3 4:3

$x \quad \frac{4}{3}x \quad \frac{3}{2}x \quad 2x \quad \frac{8}{3}x \quad 3x \quad 4x \quad \frac{9}{2}x \quad \frac{16}{3}x \quad 6x \quad 8x \quad 9x \quad \frac{27}{2}x \quad 18x \quad 27x$

$\frac{4}{3} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{32}{27} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2}$

Σχήμα 5: Η δομή των 15 όρων μετά την τοποθέτηση των αριθμητικών και των αρμονικών μέσων.

Στο σημείο αυτό επιβάλλεται σχολιασμός της διαστηματικής δομής των 15 όρων του σχήματος 5, διότι από αυτή τη δομή και μόνον εξαρτάται η σωστή λύση του Πλατωνικού προβλήματος.

Η εν λόγω δομή απαρτίζεται:

- από πέντε (5) επόγδοα διαστήματα $\left(\frac{9}{8}\right)$ με αυτοδύναμη υπόσταση. *Τούτο σημαίνει ότι το καθένα από αυτά τα επόγδοα διαστήματα θα παίξει το ρόλο διαζευτικού τόνου και ΜΟΝΟΝ χωρίς να συμμετέχει στη δομή ούτε κάποιου επιτρίτου (τετραχόρδου), ούτε κάποιου ημιολίου (πενταχόρδου) διαστήματος.*
- από έξι (6) επίτριτα διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$ με αυτοδύναμη επίσης υπόσταση. *Τούτο σημαίνει ότι το καθένα από αυτά τα επίτριτα διαστήματα (τετράχορδα) θα υποστεί ό,τι είναι να υποστεί κατά τις παραγγελίες του Πλάτωνος, αλλά*

σε δύο τριπλασίους αριθμούς. Δηλαδή δομεί ένα σύστημα *διαπασών και διαπέντε* (διαπέντε + διατεσσάρων + διαπέντε).

θα εξακολουθεί να παραμένει επίτριτο διάστημα στην ίδια πάντοτε θέση, δηλαδή χωρίς να συνενούται με κάποιο προηγούμενο ή επόμενο επόγδοο διάστημα.

- από δύο (2) ημιόλια διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Για τα ημιόλια διαστήματα ο Πλάτων δεν κάνει καμμία νίξη. Γιατί να κάνει, άλλωστε, αφού το ημιόλιο διάστημα, κατά τα γνωστά, μπορεί να αντιμετωπισθεί ως επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα ή ως επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος. *Αυτή η αντιμετώπιση για τον επαΐοντα θα εξασφαλίσει ένα διάστημα αποτομής, απαραίτητο για την ολοκλήρωση της όλης δομής της Ψυχής του Κόσμου.*
- ένα διάστημα $\left(\frac{32}{27}\right)$, το οποίο εμφανίζεται μεταξύ δύο αρμονικών μέσων. Ο ένας είναι ο $\frac{9}{2}x$ εκ των όρων 3x και 9x (τριπλάσιο διάστημα) και ο άλλος είναι ο $\frac{16}{3}x$ εκ των όρων 4x και 8x (διπλάσιο διάστημα). Επειδή το διάστημα μεταξύ των όρων 4x και $\frac{9}{2}x$ είναι επόγδοο και μεταξύ των όρων 4x και $\frac{16}{3}x$ είναι επίτριτο, έπεται ότι το ενδιάμεσο διάστημα μεταξύ των όρων $\frac{9}{2}x$ και $\frac{16}{3}x$ είναι ίσο με ένα επόγδοο διάστημα συν ένα λείμμα ή ένα λείμμα συν ένα επόγδοο διάστημα, γεγονός που εξαρτάται από την αλληλουχία των εpογδόων διαστημάτων και του λείμματος εντός του επιτρίτου διαστήματος, δηλαδή εντός του τετραχόρδου. Άρα: $\frac{32}{27}=\frac{9}{8}\cdot\frac{256}{243}=\frac{256}{243}\cdot\frac{9}{8}$. Στη συνέχεια της μελέτης το διάστημα $\left(\frac{32}{27}\right)$ θα αντιμετωπίζεται με μια από τις δύο αυτές αλληλουχίες του τόνου και του λείμματος.

Τέλος, ο Πλάτων μας παραγγέλλει (36a6-b5) σε αυτή τη σειρά των αριθμών τα διαστήματα των όρων με λόγο επίτριτο να τα διαιρέσουμε σε επογδόους τόνους και σε λείμματα.

> ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους εξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια.
> (36a6-b5)

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σχολιάσουμε ότι ο Πλάτων προτείνει τη συμπλήρωση των επιτρίτων διαστημάτων χωρίς να καθορίζει τη δομή του τετραχόρδου κατά την κατιούσα διαδοχή Δώριο (τ-τ-λ) ή Φρύγιο (τ-λ-τ) ή Λύδιο (λ-τ-τ). Επειδή ο Πλάτων από τις υπάρχουσες αρμονίες, τελικά, αποδεχόταν μόνον αυτές, των οποίων τα τετράχορδα είχαν Δώριο και δευτερευόντως Φρύγιο δομή (*Πολιτεία* 399a 3-4), απορρίπτοντας τη Λύδιο δομή των τετραχόρδων, όλοι οι φιλόσοφοι, οι οποίοι μελέτησαν το συγκεκριμένο μουσικό πρόβλημα, ασχολήθηκαν με Δώριες δομές τετραχόρδων.

Έλυσα το συγκεκριμένο πρόβλημα και για τις τρεις δομές του τετραχόρδου[37]. Στην παρούσα εργασία θα εκτεθεί η λύση του προβλήματος του μουσικού Πλατωνικού χωρίου, η οποία αναφέρεται σε Δώριες δομές τετραχόρδων κατά την κατιούσα διαδοχή.

1.2.1 Σπυρίδειος λύση με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή.

Πρέπει να έχομε κατά νουν για τη σωστή επίλυση του προβλήματος του μουσικού Πλατωνικού χωρίου ότι σε κανένα μουσικό σύστημα των αρχαίων Ελλήνων, λόγω του τρόπου διαδοχής των συνημμένων ή/και των διεζευγμένων τετραχόρδων σε αυτά, *δεν εμφανίζεται αλληλοδιαδοχή περισσοτέρων των τριών επογδόων τόνων*. Με αυτή την επισήμανση κατά νουν προχωρούμε στη συμπλήρωση των επιτρίτων διαστημάτων με διαστήματα επογδόων τόνων $\frac{9}{8}$ και λειμμάτων $\left(\frac{256}{243}\right)$ κατά τις παραγγελίες του Πλάτωνος (Πίνακας 4).

Πίνακας 4: Δομή της Ψυχής Κόσμου με 35 όρους

	τ		τ		λ		τ	
x	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	τ	$\frac{27}{16}x$	τ	$\frac{243}{128}x$	λ	$2x$		

37. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2006, σσ. 256-291.

$2x$	τ	$\frac{9}{4}x$	τ	$\frac{81}{32}x$	λ	$\frac{8}{3}x$		τ		$3x$
$3x$	τ	$\frac{27}{8}x$	τ	$\frac{243}{64}x$	λ	$4x$		τ		$\frac{9}{2}x$
					τ=A+λ					
$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$	τ	$\frac{81}{16}x$	λ	$\frac{16}{3}x$	A	$\frac{729}{128}x$	λ	$6x$
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ=A+λ			
$6x$	τ	$\frac{27}{4}x$	τ	$\frac{243}{32}x$	λ	$8x$		τ		$9x$
Τετράχορδο + Τόνος										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$		τ		$\frac{27}{2}x$
Τόνος + Τετράχορδο										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$	A	$\frac{6561}{512}x$	λ	$\frac{27}{2}x$
					τ=λ+A					
Συνισταμένη δομή										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$	A	$\frac{6561}{512}x$	λ	$\frac{27}{2}x$
					τ=λ+A					
$\frac{27}{2}x$	τ	$\frac{243}{16}x$	τ	$\frac{2187}{128}x$	λ	$18x$				
Τετράχορδο + Τόνος										

$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	λ	$24x$		τ		$27x$
Τόνος + Τετράχορδο										
$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	τ			$\frac{6561}{256}x$	λ	$27x$
Συνισταμένη δομή										
$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	λ	$24x$	Α	$\frac{6561}{256}x$	λ	$27x$
					τ=λ+Α					

Η ανωτέρω διάσπαση του τόνου μεταξύ των όρων $\frac{16}{3}x$ και σε $6x$ αποτομή και λείμμα και η συναρμολόγηση του τόνου μεταξύ των όρων $\frac{81}{16}x$ και $\frac{729}{128}x$ από το υπάρχον λείμμα και την προκύψασα αποτομή έχουν ως σκοπό τα δύο «διασταυρούμενα» τετράχορδα του σχήματος 5 να αποκτήσουν τη δομή τ-τ-λ.

Όπως μας πληροφορεί ο φιλόσοφος Τίμαιος ο Πυθαγόρειος[38], η κατασκευαζομένη δομή πρέπει να έχει 36 όρους και όχι 35, όπως έχει η δομή που κατασκευάσαμε.

> δεῖ δ' εἶμέν πως πάντας σὺν τοῖς συμπληρώμασι
> καὶ τοῖς ἐπογδόοις ὅρους εξ καὶ τριάκοντα,
>
> Τίμαιος, Fragmenta et titulus, σ. 209, 6-7.

Ένας από τους 35 ευρεθέντες όρους προήλθε, όπως εδείχθη, από διάστημα αποτομής[39]. Ο τριακοστός έκτος όρος θα προέλθει και αυτός από διάστημα αποτομής, το οποίο θα προκύψει από ένα εκ των δύο πενταχόρδων, όταν τούτο αντιμετωπισθεί συγχρόνως και ως τόνος+τετράχορδο και ως τετράχορδο+τόνος

38. Αυτόθι (Βλέπε Κεφάλαιο 13.3.2.3.1).

39. Διάφοροι μελετητές του εν λόγω χωρίου ισχυρίζονται ότι ο Πλάτων δεν ομιλεί πουθενά για διάστημα αποτομής. Το διάστημα της αποτομής τιμάται με τη σιωπή του μεγαλείου. Η συνύπαρξη διεζευγμένου και συνημμένου τετραχόρδου με αφετηρία τον όρο 4x γεννά, είτε το λέει, είτε δεν το λέει ρητά ο Πλάτων, ένα μουσικό διάστημα αποτομής $\left(A = \tau - \lambda = \frac{2187}{2048}\right)$ ανάμεσα στους όρους $\frac{1024}{243}, \frac{9}{2}$.

(συνισταμένη δομή). Κατόπιν τούτου, από αυτή την αναλυτική δομή της Ψυχής του Κόσμου προκύπτουν οι εξής επί μέρους *δυνατές* δομές (Πίνακες 5, 6, 7, 8):

Πίνακας 5: Δομή 1η. Από x έως $9x$, η συνισταμένη δομή του πρώτου πενταχόρδου, τετράχορδο, πεντάχορδο ως τετράχορδο συν τόνος.

	τ		τ		λ			τ		
x	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}x$		$\frac{9}{8}$		$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	τ	$\frac{27}{16}x$	τ	$\frac{243}{128}x$	λ	$2x$				
$2x$	τ	$\frac{9}{4}x$	τ	$\frac{81}{32}x$	λ	$\frac{8}{3}x$		τ		$3x$
$3x$	τ	$\frac{27}{8}x$	τ	$\frac{243}{64}x$	λ	$4x$		τ		$\frac{9}{2}x$
$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$	τ	$\frac{81}{16}x$	λ	$\frac{16}{3}x$	Α	$\frac{729}{128}x$	λ	$6x$
	Τετράχορδο=τ+τ+λ							τ=Α+λ		
$6x$	τ	$\frac{27}{4}x$	τ	$\frac{243}{32}x$	λ	$8x$		τ		$9x$
Συνισταμένη δομή										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$	Α	$\frac{6561}{512}x$	λ	$\frac{27}{2}x$
					τ=λ+Α					

$\frac{27}{2}x$	τ	$\frac{243}{16}x$	τ	$\frac{2187}{128}x$	λ	$18x$		
Τετράχορδο + Τόνος								

(Η δομή αυτή περιέχει μία αλληλουχία τεσσάρων επογδόων τόνων μεταξύ των όρων $8x$ και $\frac{6561}{512}x$. Συνεπώς, απορρίπτεται).

Πίνακας 6: Δομή 2η. Από x έως $9x$, η συνισταμένη δομή του πρώτου πενταχόρδου, τετράχορδο, πεντάχορδο ως τόνος συν τετράχορδο.

	τ		τ		λ		τ	
x	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	τ	$\frac{27}{16}x$	τ	$\frac{243}{128}x$	λ	$2x$		
$2x$	τ	$\frac{9}{4}x$	τ	$\frac{81}{32}x$	λ	$\frac{8}{3}x$	τ	$3x$
$3x$	τ	$\frac{27}{8}x$	τ	$\frac{243}{64}x$	λ	$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$
$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$	τ	$\frac{81}{16}x$	λ	$\frac{16}{3}x$	Α $\frac{729}{128}x$ λ	$6x$
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ= Α+λ	
$6x$	τ	$\frac{27}{4}x$	τ	$\frac{243}{32}x$	λ	$8x$	τ	$9x$

Συνισταμένη δομή										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$	Α	$\frac{6561}{512}x$	λ	$\frac{27}{2}x$
					τ=λ+Α					
$\frac{27}{2}x$	τ	$\frac{243}{16}x$	τ	$\frac{2187}{128}x$	λ	$18x$				
Τόνος + Τετράχορδο										
$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	τ			$\frac{6561}{256}x$	λ	$27x$

(Η δομή αυτή περιέχει μία αλληλουχία τεσσάρων επογδόων τόνων μεταξύ των όρων $8x$ και $\frac{6561}{512}x$. Συνεπώς, απορρίπτεται).

Πίνακας 7: Δομή 3η. Από x έως $9x$, πεντάχορδο ως τετράχορδο συν τόνος, τετράχορδο, η συνισταμένη δομή του δευτέρου πενταχόρδου,

	τ		τ		λ		τ	
x	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	τ	$\frac{27}{16}x$	τ	$\frac{243}{128}x$	λ	$2x$		
$2x$	τ	$\frac{9}{4}x$	τ	$\frac{81}{32}x$	λ	$\frac{8}{3}x$	τ	$3x$
$3x$	τ	$\frac{27}{8}x$	τ	$\frac{243}{64}x$	λ	$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$

$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$	τ	$\frac{81}{16}x$	λ	$\frac{16}{3}x$	Α	$\frac{729}{128}x$	λ	$6x$
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ= Α+λ			
$6x$	τ	$\frac{27}{4}x$	τ	$\frac{243}{32}x$	λ	$8x$	τ			$9x$
Τετράχορδο + Τόνος										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	λ	$12x$	τ			$\frac{27}{2}x$
$\frac{27}{2}x$	τ	$\frac{243}{16}x$	τ	$\frac{2187}{128}x$	λ	$18x$				
Συνισταμένη δομή										
$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	λ	$24x$	Α	$\frac{6561}{256}x$	λ	$27x$
					τ=λ+Α					

Η δομή αυτή είναι *αποδεκτή*, επειδή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του Πλατωνικού αλγορίθμου.

Πίνακας 8: Δομή 4^{η}. Από x έως $9x$, πεντάχορδο ως τόνος συν τετράχορδο, τετράχορδο, η συνισταμένη δομή του δευτέρου πενταχόρδου,

	τ		τ		λ		τ	
x	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	τ	$\frac{27}{16}x$	τ	$\frac{243}{128}x$	λ	$2x$		

$2x$	τ	$\frac{9}{4}x$	τ	$\frac{81}{32}x$	λ	$\frac{8}{3}x$	τ			$3x$
$3x$	τ	$\frac{27}{8}x$	τ	$\frac{243}{64}x$	λ	$4x$	τ			$\frac{9}{2}x$
$4x$	τ	$\frac{9}{2}x$	τ	$\frac{81}{16}x$	λ	$\frac{16}{3}x$	Α	$\frac{729}{128}x$	λ	$6x$
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ= Α+λ			
$6x$	τ	$\frac{27}{4}x$	τ	$\frac{243}{32}x$	λ	$8x$	τ			$9x$
Τόνος + Τετράχορδο										
$9x$	τ	$\frac{81}{8}x$	τ	$\frac{729}{64}x$	τ			$\frac{6561}{512}x$	λ	$\frac{27}{2}x$
$\frac{27}{2}x$	τ	$\frac{243}{16}x$	τ	$\frac{2187}{128}x$	λ	$18x$				
Συνισταμένη δομή										
$18x$	τ	$\frac{81}{4}x$	τ	$\frac{729}{32}x$	λ	$24x$	Α	$\frac{6561}{256}x$	λ	$27x$
					τ=λ+Α					

(Η δομή αυτή περιέχει μία αλληλουχία τεσσάρων επογδόων τόνων μεταξύ των όρων $8x$ και $\frac{6561}{512}x$. Συνεπώς, απορρίπτεται).

Οι 1η, 2η και 4η δομές (Πίνακες 5, 6 και 8), ως περιέχουσες μία αλληλουχία τεσσάρων επογδόων τόνων μεταξύ των όρων $8x$ και $\frac{6561}{512}x$, απορρίπτονται.

Η 3η μουσική δομή των 36 όρων (Πίνακας 7), που προέκυψε, καλύπτει συνολικώς συχνοτικό εύρος τεσσάρων διαπασών, ενός διαπέντε και ενός επογδόου τόνου[40], αλλά με την εξής αλληλουχία:

Διαπασών, Διαπασών, Διαπασών, Επόγδοος τόνος, Διαπασών, Διαπέντε.

Προκειμένου να μπορέσομε να εκφράσομε με ακεραίους αριθμούς τους 36 όρους της αποδεκτής δομής, βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών των κλασμάτων, που την εκφράζουν (Πίνακας 9).

Πίνακας 9: Εύρεση του Ε.Κ.Π. των αριθμών 8, 64, 3, 2, 16, 128, 4, 32, 256 της 3ης Δομής.

8	64	3	2	16	128	4	32	256	2
4	32	3	1	8	64	2	16	128	2
2	16	3	1	4	32	1	8	64	2
1	8	3	1	2	16	1	4	32	2
1	4	3	1	1	8	1	2	16	2
1	2	3	1	1	4	1	1	8	2
1	1	3	1	1	2	1	1	4	2
1	1	3	1	1	1	1	1	2	2
1	1	3	1	1	1	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	

$\Rightarrow$ Ε.Κ.Π. $= 2^8 \times 3^1 = 768$

Στις ευρεθείσες κλασματικές εκφράσεις των 36 όρων της αποδεκτής δομής εκ του Πλατωνικού μουσικού προβλήματος τοποθετούμε όπου x το Ε.Κ.Π. και λαμβάνομε (Πίνακας 10):

40. Κατά τον Άδραστο (Θέων Σμυρναίος 64.1) ο Πλάτων επεξέτεινε το διατονικό γένος σε υπερβολικά μεγάλη έκταση, εάν λάβει υπόψη του κανείς ότι ο Αριστόξενος στο διάγραμμα των 13 «τόνων» ή «τρόπων» καλύπτει μια έκταση δύο οκτάβων και ενός διατεσσάρων και οι μεταγενέστεροί του με τους 15 «τόνους» ή «τρόπους» καλύπτουν μια έκταση τριών οκτάβων και ενός τόνου.

Πίνακας 10: Δομή 3^{η}. Από έως *x* έως 9*x*, πεντάχορδο ως τετράχορδο συν τόνος, τετράχορδο, η συνισταμένη δομή του δευτέρου πενταχόρδου.

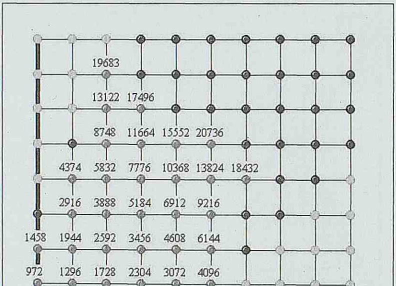
768	τ	864	τ	972	λ	1024		τ		1152
1152	τ	1296	τ	1458	λ	1536				
1536	τ	1728	τ	1944	λ	2048		τ		2304
2304	τ	2592	τ	2916	λ	3072		τ		3456
3072	τ	3456	τ	3888	λ	4096	Α	4374	λ	4608
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ=Α+λ			
4608	τ	5184	τ	5832	λ	6144		τ		6912
Τετράχορδο + Τόνος										
6912	τ	7776	τ	8748	λ	9216		τ		10368
10368	τ	11664	τ	13122	λ	13824				
Συνισταμένη δομή										
13824	τ	15552	τ	17496	λ	18432	Α	19683	λ	20736
					τ=λ+Α					

Τι παριστούν οι ευρεθέντες 36 ακέραιοι αριθμοί του Πίνακα 10;

Οι αριθμοί αυτοί παριστούν μια κατατομή του συμπαντικού μονοχόρδου. Δηλαδή παριστούν τις θέσεις των τάστων επάνω στο εν λόγω μονόχορδο ή, με άλλα λόγια, παριστούν μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής αυτού του μονοχόρδου (Σχήμα 11). Αυτά ισχυρίζεται και ο Άδραστος (Θέων Σμυρναίος, 65.10) λέγοντας ότι στους μεγαλύτερους αριθμούς πρέπει να αποδοθούν χαμηλότεροι φθόγγοι και όχι μεγαλύτερες τάσεις χορδών από τυχόν αναρτήσεις από αυτές μεγάλων βαρών.

Επειδή οι αριθμοί βαίνουν αυξανόμενοι, αυξανόμενα βαίνουν και τα μήκη των δονουμένων τμημάτων της χορδής αυτού του μονοχόρδου. Συμφώνως προς τους νόμους των χορδών[41] εκ της Μουσικής Ακουστικής, το μήκος του δονουμένου τμήματος της χορδής είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το μουσικό ύψος του παραγομένου ήχου. Τούτο σημαίνει ότι η προκύψασα δομή των 36 όρων είναι μια δομή 36 ήχων κατά την κατιούσα διαδοχή.

Ο Πρόκλος επισημαίνει ότι η αρμονία που γίνεται ακουστή, διαπερνώντας τα αυτιά μας, και η οποία προκαλείται από τους ήχους και τις κρούσεις, έχει αλλάξει εντελώς από τη ζωτική και νοερά αρμονία. Συνεχίζει δε προτείνοντας να μη μένουμε ολοσχερώς (εντελώς) ακλόνητοι στην εκτεθείσα μαθηματική θεωρία, αλλά με τον πρέποντα τρόπο δια της ουσίας της Ψυχής να διεγείρουμε τον εαυτό μας. Εγώ αυτό το εκλαμβάνω σαν μια συμβουλή του Πρόκλου προς εμάς να αντλήσουμε από το δομηθέν μοντέλο όλες τις δυνατές, θείες –με την έννοια του αποδεκτού από την αισθητική του Πλάτωνος– αλληλουχίες φθόγγων (=μουσικές κλίμακες ή μουσικά συστήματα), προκειμένου να συνθέσουμε μελωδίες.

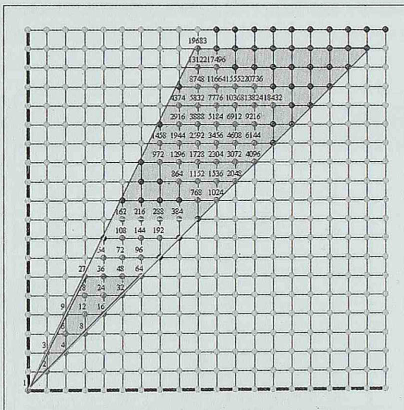


Σχήμα 11: Οι ακέραιες τιμές του Πίνακα 10 επί του Σπυριδείου δικτυωτού. Άρα εκφράζουν μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής.

41. Βλέπε Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, 2005, Φυσική και Μουσική Ακουστική, Εκδ. Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 310.

Οι εν λόγω αριθμοί της Σπυριδείου λύσεως του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή τοποθετημένοι επί του Σπυριδείου δικτυωτού φαίνονται και στο σχήμα 12. Όπως μπορεί να δει κανείς, όλοι οι αριθμοί εμπεριέχονται σε ένα τμήμα επιφανείας λαβδοειδούς σχήματος στην κορυφή του οποίου δεσπόζει η «ανθυφαιρετική» μονάς και επί του κάθε σκέλους της ευρίσκονται οι δύο τετρακτύες 1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27.

Εφαρμόζοντας τη ρήση του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους» όλοι οι αριθμοί της λύσεως εμπεριέχονται εντός τριών τριγώνων. Στο πρώτο τρίγωνο τοποθετούνται οι αριθμοί της Πλατωνικής ή μεγίστης τετρακτύος, στο εσώτερο τρίγωνο τοποθετούνται οι εξαπλάσιοί τους, οι οποίοι έχουν και αριθμητικό και αρμονικό μέσο και στο τρίτο τρίγωνο περικλείονται όλοι οι αριθμοί της δομής.



Σχήμα 12: Λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» επί του Σπυριδείου δικτυωτού με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή και γεωμετρική ερμηνεία της ρήσεως του Πρόκλου « Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».
Πρόκλου Εις τον Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

Εάν θα θέλαμε να προσεγγίσουμε τη δομή εκ της λύσεως του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή με τη σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα λαμβάναμε την αλληλουχία νοτών του Πίνακα 13.

Πίνακας 13: Η Σπυρίδειος λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή αντιστοιχημένη με νότες της ευρωπαϊκής σημειογραφίας.

			ττλ	
E	768			
D	864			
C	972			
B	1024			
A	1152			
G	1296			
F	1458			
E	1536			
D	1728			
C	1944			
B	2048			
A	2304			

G	2592			
F	2916			
E	3072			
D	3456			
C	3888			
B	4096			
Bb	4374			
A	4608			
G	5184			
F	5832			
E	6144			
D	6912			
C	7776			
Bb	8748			
A	9216			
G	10368			
F	11664			

Eb	13122			
D	13824			
C	15552			
Bb	17496			
A	18432			
Ab	19683			
G	20736			

1.2.2 Σπυρίδειος λύση με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή σύμφωνα με την αρχαιοελληνική μαθηματική διαδικασία.

Η Σπυρίδειος λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή, η οποία αναλυτικότατα εξετέθη στο προηγούμενο κεφάλαιο (1.2.1), προήλθε από μια αντιμετώπιση του όλου προβλήματος Αλγεβρικής φιλοσοφίας. Κατά τη λύση αυτή πολλά στάδια της μαθηματικής αναλύσεως, που αντιμετώπιζε τότε ο Πλάτων, παραλείπονται ως μη απαραίτητα. Έτσι, σχηματίζεται η εσφαλμένη εντύπωση στον αναγνώστη ή ερευνητή ότι το όλο Πλατωνικό πρόβλημα «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» είναι απλό.

Ο συγγραφεύς της μετά χείρας εργασίας θεώρησε απαραίτητο να λύσει το Πλατωνικό πρόβλημα «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή έτσι, όπως θα το έλυαν οι μαθηματικοί την εποχή του Πλάτωνος, μόνο και μόνο για να γίνει αντιληπτό στον αναγνώστη ή ερευνητή το πλήθος των απαραιτήτων μαθηματικών γνώσεων. Κατ' ανάλογο τρόπο, βέβαια, λύνεται το εν λόγω πρόβλημα με Φρύγιες ή Λύδιες δομές των τετραχόρδων.

Στο κεφάλαιο 1.2 ετέθη το Πλατωνικό πρόβλημα «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» και προέκυψαν οι επτά όροι (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) της μεγίστης ή Πλατωνικής τετρακτύος.

Στη συνέχεια ο Πλάτων μας παραγγέλλει τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα να τα συμπληρώσουμε με τις αρμονικές και τις αριθμητικές μεσότητες.

Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 15 (*Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*) αναφέρεται στην αριθμητική και την αρμονική αναλογία, οι οποίες συνδέονται με τις μουσικές συμφωνίες και τους μουσικούς φθόγγους. Επίσης στο κεφάλαιο 16 αναφέρει τον τρόπο υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου.

Κατά τον Εύδωρο, για τα διπλάσια, όσο και για τα τριπλάσια διαστήματα το άθροισμα των ημίσεων των άκρων όρων δίδει τον αριθμητικό μέσο. Τούτο σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τους αριθμητικούς μέσους (Πίνακες 15 και 16), πρέπει όλοι οι αριθμοί της Πλατωνικής τετρακτύος να διαιρούνται δια του 2. Γι' αυτό διπλασιάζουμε τους όρους της Πλατωνικής τετρακτύος (Πίνακας 14).

Πίνακας 14: Οι διπλασιασμένοι όροι της Πλατωνικής τετρακτύος

2	4	6	8	18	16	54

Πίνακας 15: Ένθεση αριθμητικών μέσων στα διπλάσια διαστήματα.

		2		4		8		16
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$		3		6		12	

Πίνακας 16: Ένθεση αριθμητικών μέσων στα τριπλάσια διαστήματα.

		2		6		18		54
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$		4		12		36	

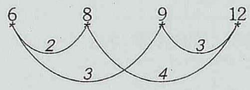
Στα διπλάσια διαστήματα το άθροισμα του ενός τρίτου του μικροτέρου όρου και του ημίσεος του μεγαλυτέρου όρου δίδει τον αρμονικό μέσο (Πίνακας 17). Στα τριπλάσια διαστήματα το άθροισμα του ημίσεος του μικροτέρου όρου και του ενός τρίτου του μεγαλυτέρου όρου δίδει τον αρμονικό μέσο (Πίνακας 18).

Η νέα απαίτηση σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τους αρμονικούς μέσους, πρέπει όλοι οι αριθμοί της Πλατωνικής τετρακτύος να διαιρούνται δια του 2 και δια του 3. Έτσι, τριπλασιάζουμε όλους τους αριθμούς της Πλατωνικής τετρακτύος καθώς επίσης και τους ευρεθέντες αριθμητικούς μέσους τους.

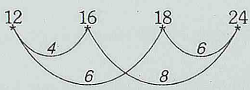
Πίνακας 17: Ένθεση αρμονικών μέσων στα διπλάσια διαστήματα.

		6		12		24		48
αρμονικός μέσος	$\alpha = 2\gamma \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{\alpha}{2}$		8[42]		16[43]		32[44]	

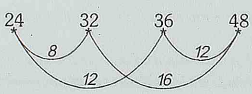
42. Ας πάρουμε, λοιπόν, τον αριθμό 6 και τον διπλάσιό του, τον 12. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τον ίδιο λόγο, τον οποίον έχουν η δυάς με τη μονάδα. Ανάμεσα σ' αυτούς τους αριθμούς, που είναι εξαπλάσιοι της μονάδος και της δυάδος, παρεμβάλλονται οι αριθμοί 8 και 9, που είναι οι προαναφερθείσες μεσότητες (αρμονική και αριθμητική). Πράγματι, ο μεν αριθμός 8 κατά τον ίδιο λόγο υπερέχει και υπερέχεται με τους δυο ακραίους αριθμούς $\left(\frac{12-8}{8-6}=\frac{12}{6}\right)$ ο δε αριθμός 9 κατά το αυτό πλήθος μονάδων υπερέχει και υπερέχεται των δυο ακραίων αριθμών (12 - 9=9 - 6). Εξαπλασιάζοντας, λοιπόν, τη μονάδα και τη δυάδα βρήκαμε αριθμούς που να επιδέχονται τις προαναφερθείσες μεσότητες.



43. Ανάμεσα στον 12 και τον διπλάσιό του 24 παρεμβάλλεται ο 16 ως αρμονική μεσότης και ο 18 ως αριθμητική μεσότης.



44. Ανάμεσα στον τρίτο διπλάσιο, τον 24, και στον 48 παρεμβάλλονται ως αρμονική μεν μεσότης ο 32, ως αριθμητική δε μεσότης ο 36.



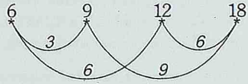
Πίνακας 18: Ένθεση αρμονικών μέσων στα τριπλάσια διαστήματα.

		6		18		54		162
αρμονικός μέσος	$\alpha = 3\gamma \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{3}$		9[45]		27[46]		81[47]	

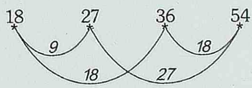
Άρα διηρέθησαν τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα με τις συγκεκριμένες δύο μεσότητες (αριθμητική και αρμονική)[48] και προέκυψε η σειρά αριθμών που φαίνεται στον Πίνακα 19.

---

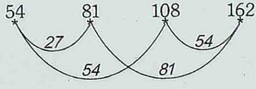
45. Ανάμεσα στον 6 και τον 18, που είναι οι πρώτοι τριπλάσιοι, παρεμβάλλονται ως αρμονική μεσότης ο 9 και ως αριθμητική μεσότης ο 12.



46. Ανάμεσα στον δεύτερο τριπλάσιο, τον 18, και τον 54 παρεμβάλλονται ως αρμονικός μέσος ο 27, ως αριθμητικός μέσος ο 36.



47: Ανάμεσα στον τρίτο τριπλάσιο, τον 54, και τον 162 παρεμβάλλονται ως αρμονική μεσότης ο 81, ως αριθμητική μεσότης ο 108.



48. Στον αλγόριθμο για τη λύση του προβλήματος «*γένεση Ψυχής Κόσμου*» ο Πλάτων δίδει ως απαραίτητο το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αφορά στους αριθμητικό και αρμονικό μέσους:

Θεώρημα: *Έστωσαν δύο αριθμοί που είναι, αντιστοίχως, ο διπλάσιος και ο τριπλάσιος ενός δοθέντος αριθμού.*

Εάν στο διπλάσιο διάστημα ληφθεί ο αριθμητικός μέσος των άκρων του, τότε:

- *Αυτός ο αριθμητικός μέσος (στο διπλάσιο διάστημα) καθίσταται αρμονικός μέσος για το τριπλάσιο διάστημα.*

Πίνακας 19: Η σειρά των αριθμών που προέκυψε από την ένθεση των αριθμητικών και αρμονικών μέσων στα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="3">4/3</td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>12</td><td>16</td><td>18</td><td>24</td><td>27</td><td>32</td><td>36</td><td>48</td><td>54</td><td>81</td><td>108</td><td>162</td></tr>
<tr><td colspan="2">4/3</td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td colspan="3">4/3</td><td></td><td colspan="2">3/2</td><td colspan="2">3/2</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Πίνακα 19 τα διαστήματα των όρων, που έχουν λόγο επίτριτο, να τα διαιρέσουμε σε επογδόους τόνους και σε λείμματα.

Εργαζόμεθα ως εξής: Προκειμένου να ληφθεί ο επόγδοος ενός δοθέντος αριθμού, θα πρέπει ο δοθείς αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 8. Προς τούτοις, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς (Πίνακας 19) και έχομε τη σειρά των αριθμών του Πίνακα 20.

Πίνακας 20: Οι άριθμοί του Πίνακα 19 οκταπλασιασμένοι, προκειμένου να ευρεθούν οι επόγδοοί τους.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="3">4/3</td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td></td></tr>
<tr><td>48</td><td>64</td><td>72</td><td>96</td><td>128</td><td>144</td><td>192</td><td>216</td><td>256</td><td>288</td><td>384</td><td>432</td><td>648</td><td>864</td><td>1296</td></tr>
<tr><td colspan="2">4/3</td><td colspan="2">4/3</td><td></td><td colspan="2">4/3</td><td colspan="3">4/3</td><td></td><td colspan="2">3/2</td><td colspan="2">3/2</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">9/8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 48, 64 επόγδοος του 48 είναι ο αριθμός 54.
2. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 72, 96 επόγδοος του 72 είναι ο αριθμός 81.
3. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 96, 128 επόγδοος του 96 είναι ο αριθμός 108.

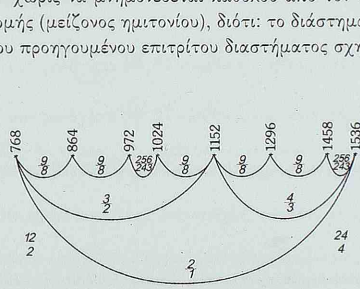
• *Ο μεγαλύτερος των ακραίων αριθμών του διπλασίου διαστήματος καθίσταται αριθμητικός μέσος του τριπλασίου διαστήματος.*

4. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 144, 192 επόγδοος του 144 είναι ο αριθμός 162.
5. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 192, 256 επόγδοος του 192 είναι ο αριθμός 216.
6. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 216, 288 επόγδοος του 216 είναι ο αριθμός 243.
7. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 288, 384 επόγδοος του 288 είναι ο αριθμός 324.
8. Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 648, 864 επόγδοος του 648 είναι ο αριθμός 729.

Προκειμένου να ληφθούν οι δεύτεροι επόγδοοι όροι στα προμνημονευθέντα οκτώ επίτριτα διαστήματα, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς και έχομε την εξής σειρά αριθμών:

Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 384, 512 παρενεβλήθησαν οι δύο διαδοχικοί επόγδοοι όροι 432 και 486. Ακολουθεί εν διαζεύξει το επίτριτο διάστημα των αριθμών 576, 768 με τους δύο διαδοχικούς επογδόους όρους 648 και 729. Ακολουθεί το συνημμένο τετράχορδο (επίτριτο διάστημα) των αριθμών 768[49] και 1024, στο οποίο έχουν παρεμβληθεί οι δύο διαδοχικοί επόγδοι όροι 864 και 972. Ακολουθεί ένας διαζευκτικός επόγδοος τόνος και έπονται δύο συνημμένα επίτριτα διαστήματα. Το ένα μεταξύ των όρων 1152 και 1536 με τους αριθμούς 1296 και 1458 ως διαδοχικούς επογδόους όρους του. Το άλλο μεταξύ των όρων 1536 και 2048 με τους αριθμούς 1728 και 1944 ως διαδοχικούς επογδόους όρους του. Ένα ζεύγος συνημμένων επιτρίτων διαστημάτων αρχίζει από τον όρο 1728 και εμπλέκεται με το προηγούμενο ζεύγος των συνημμένων επιτρίτων διαστημάτων. Πράγματι, στο επίτριτο διάστημα μεταξύ των όρων 1728 και 2304 παρεμβάλλονται οι αριθμοί 1944 και 2187 ως διαδοχικοί επόγδοι όροι. Εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά –χωρίς να μνημονεύεται καθόλου από τον Πλάτωνα– το διάστημα της Αποτομής (μείζονος ημιτονίου), διότι: το διάστημα μεταξύ των όρων 1944 και 2048 του προηγουμένου επιτρίτου διαστήματος σχηματίζεται διάστη-

49



μα λείμματος (ελάσσονος ημιτονίου), ενώ μεταξύ των όρων 1944 και 2187 του παρόντος επιτρίτου διαστήματος σχηματίζεται επόγδοο διάστημα. Άρα η διαφορά τους, δηλαδή το διάστημα μεταξύ των όρων 2048 και 2187, είναι διάστημα Αποτομής. Το συνημμένο προς το προηγούμενο επίτριτο διάστημα είναι το επίτριτο διάστημα μεταξύ των όρων 2304 και 3072, στο οποίο παρεμβάλλονται ως διαδοχικοί επόγδοοι όροι οι αριθμοί 2592 και 2916. Σε απόσταση ενός επογδόου τόνου και ενός ημιολίου διαστήματος συναντάται το τελευταίο επίτριτο διάστημα μεταξύ των όρων 5184 και 6912. Σε αυτό το επίτριτο διάστημα παρεμβάλλονται ως διαδοχικοί επόγδοοι όροι οι αριθμοί 5832 και 6561.

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η μελέτη της δομής της Ψυχής του Κόσμου, απομένουν δύο ημιόλια διαστήματα. Το ένα μεταξύ των όρων 3456 και 5184 και το άλλο μεταξύ των όρων 6912 και 10368.

Για τα ημιόλια διαστήματα δεν έκανε μνεία ο Πλάτων. Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 19 λέει ότι ο Πλάτων τα παρέλειψε. Εγώ ισχυρίζομαι ότι τα παρέλειψε, επειδή είναι ευκολονόητο[50] το τί θα πρέπει να κάνουμε. Πράγματι, το ημιόλιο διάστημα ισούται με ένα επίτριτο διάστημα συν έναν επόγδοο τόνο ή έναν επόγδοο τόνο συν ένα επίτριτο διάστημα.

Μελέτη της δομής του πρώτου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 3456 και 5184.

Το ημιόλιο αυτό διάστημα ΔΕΝ μπορεί να έχει τη δομή επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα με δομή επόγδοος τόνος, επόγδοος τόνος, λείμμα, διότι εμφανίζεται η απηγορευμένη αλληλουχία τεσσάρων επογδόων διαστημάτων. Πράγματι, πριν από το ημιόλιο αυτό διάστημα υπάρχει ένας επόγδοος τόνος μεταξύ των όρων 3072 και 3456 και ακολουθούν ένας επόγδοος τόνος και άλλοι δύο επόγδοοι τόνοι από το επίτριτο διάστημα.

Άρα το ημιόλιο αυτό διάστημα υποχρεωτικά θα έχει τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος και θα υλοποιείται με τους αριθμούς 3456, 3888, 4374, 4608, 5184.

Μελέτη της δομής του δευτέρου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 6912 και 10368.

Το ημιόλιο αυτό διάστημα μπορεί να έχει και τη δομή επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα [τ+(τ+τ(=λ+Α)+λ)] και τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος [(τ+τ+λ)+τ]. Οι δύο αυτές δομές συνυπάρχουν στη συνισταμένη δομή της μορφής του σχήματος 6.

50. Και όμως σε αυτό το σημείο συμβαίνουν τα λάθη στους υπολογισμούς όλων των αρχαιοελλήνων, που ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο πρόβλημα, μηδέ του Τιμαίου του Πυθαγορείου εξαιρουμένου.

		τ		
τ	τ	λ	Α	λ
			τ	

Σχήμα 6: Δομή ημιολίου διαστήματος· επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα [τ+(τ+τ(=λ+Α)+λ)] και επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος [(τ+τ+λ)+τ].

Τα παραπάνω υλοποιούνται από τους όρους του Πίνακα 21.

Πίνακας 21: Οι αριθμοί μεταξύ των οποίων υλοποιείται η δομή ημιολίου διαστήματος είτε ως επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα [τ+(τ+τ(=λ+Α)+λ)], είτε ως επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος [(τ+τ+λ)+τ].

	9/8		$\left(A=\tau-\lambda=\dfrac{2187}{2048}\right)$		
6912	7776	8748	9216	9841,5	10368
9/8		256/243		256/243	

Στον Πίνακα 21 υπάρχει ο μη ακέραιος αριθμός 9841,5, ο οποίος καθίσταται ακέραιος με διπλασιασμό. Προκειμένου, λοιπόν, να απαρτίζεται η δομή της Ψυχής του Κόσμου με ακεραίους αριθμούς, διπλασιάζω όλους τους ευρεθέντες μέχρι στιγμής αριθμούς, οπότε προκύπτει ότι η δομή της Ψυχής του Κόσμου υλοποιείται με τους αριθμούς του Πίνακα 22.

Πίνακας 22: Η δομή της Ψυχής του Κόσμου με ακεραίους αριθμούς.

768	τ	864	τ	972	λ	1024	τ	1152
1152	τ	1296	τ	1458	λ	1536		
1536	τ	1728	τ	1944	λ	2048	τ	2304

2304	τ	2592	τ	2916	λ	3072	τ			3456
3072	τ	3456	τ	3888	λ	4096	Α	4374	λ	4608
	Τετράχορδο=τ+τ+λ						τ=Α+λ			
4608	τ	5184	τ	5832	λ	6144	τ			6912
Τετράχορδο + Τόνος										
6912	τ	7776	τ	8748	λ	9216	τ			10368
10368	τ	11664	τ	13122	λ	13824				
Συνισταμένη δομή										
13824	τ	15552	τ	17496	λ	18432	Α	19683	λ	20736
					τ=λ+Α					

Με την εκτεθείσα διαδικασία μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι έχουν προσπελασθεί ένας προς έναν όλοι οι αριθμοί των κόμβων εντός της λαβδοειδούς περιοχής (της Ψυχής του Κόσμου) στο Σπυρίδειο δικτυωτό.

Ο Τίμαιος ο Πυθαγόρειος λέγει[51] ότι οι όροι στο διάγραμμα είναι 36 ή, ισοδυνάμως, τα διαστήματα στο διάγραμμα είναι 35. Πράγματι, έχομε τοποθετήσει 22 επογδόους τόνους, 11 λείμματα και 2 αποτομές.

Και πάλι θα τονίσουμε το γεγονός ότι οι αριθμοί αυτοί παριστούν μια κατατομή του συμπαντικού μονοχόρδου. Δηλαδή παριστούν τις θέσεις των τάστων επάνω στο εν λόγω μονόχορδο ή, με άλλα λόγια, παριστούν μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής αυτού του μονοχόρδου, ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού.

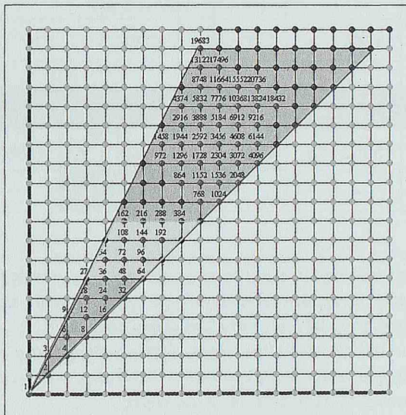
Επειδή οι 36 αυτοί αριθμοί βαίνουν αυξανόμενοι, κατά τα γνωστά από τους νόμους των χορδών εκ της Μουσικής Ακουστικής, παριστούν μια αλληλουχία ήχων κατά την κατιούσα διαδοχή.

---

51. δεῖ δ' εἶμέν πως πάντας σὺν τοῖς συμπληρώμασι
καὶ τοῖς ἐπογδόοις ὅρους ἕξ καὶ τριάκοντα,
Τίμαιος, Fragmenta et titulus, σ. 209, 6-7.

Στο σχήμα 7 οι εν λόγω αριθμοί φαίνονται ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού να εμπεριέχονται σε ένα τμήμα επιφανείας λαβδοειδούς σχήματος στην κορυφή του οποίου δεσπόζει η «ανθυφαιρετική» μονάς και επί του κάθε σκέλους της ευρίσκονται οι δύο τετρακτύες 1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27.

Εφαρμόζοντας και πάλι τη ρήση του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους» όλοι οι αριθμοί της λύσεως εμπεριέχονται εντός τριών τριγώνων. Στο πρώτο τρίγωνο τοποθετούνται οι αριθμοί της Πλατωνικής ή μεγίστης τετρακτύος, στο εσώτερο τρίγωνο τοποθετούνται οι εξαπλάσιοί τους, οι οποίοι έχουν και αριθμητικό και αρμονικό μέσο και στο τρίτο τρίγωνο περικλείονται όλοι οι αριθμοί της δομής.



Σχήμα 7: Λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» επί του Σπυριδείου δικτυωτού με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή σύμφωνα με την αρχαιοελληνική μαθηματική διαδικασία και γεωμετρική ερμηνεία της ρήσεως του Πρόκλου « Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εις τον Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α' ΠΗΓΕΣ

Ανών. Bell.	F. Bellermann, De Anonymi scriptio de Musica, Ανωνύμου σύγγραμμα περί Μουσικής, Βερολίνο 841. Νέα έκδ. D. Najock, Goettingen 1972.
Αριστείδης	Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652, A. Jahm 1882 και R. P. Winnington-Ingram, Λιψία 1963.
Αριστόξ. Αρμ.	Αριστόξενος, *Αρμονικά Στοιχεία*, έκδ. Meibom κ.α.
Αριστοτέλης	Bekker, I., Aristotelis opera omnia, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
Βάκχ. Εισ.	Βακχείος Γέρων, *Εισαγωγή Τέχνης Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652 και C. v. Jan 1895.
Βρυέν.	Μανουήλ Βρυέννιος, Αρμονικά, έκδ. J. Wallis, τόμ III, Οξφόρδη 1699.
Γαυδ. Εισ.	Γαυδέντιος Φιλόσοφος, *Αρμονική Εισαγωγή*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Ευκλ.	Ευκλείδης, *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberer και H. Monge, Leipzig (T.) 1883-1916.
Θέων Σμυρν.	Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
C. v. J.	Carl v. Jan, *Supplementum melodiarum reliquiae*, Λιψία 1899.
Κλεον. Εισ.	Κλεονείδης (ή Κλεωνίδης), *Εισαγωγή Αρμονική*, έκδ. C. v. Jan 1895.
Ευκλείδου	«*Στοιχεία*» (τόμοι 4) (επιμέλεια, σχολιασμός, απόδοση στη νεοελληνική Ευαγγέλου Σταμάτη) (Ο.Ε.Δ.Β.), Αθήνα, 1953.
LSJ	Henry G. Liddell and R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, revised and augmented by Sir Henry St. Jonew, with a Supplement, Οξφόρδη, 1968, ανατύπωση 1973.

Macran	Henry S. Macran, *The Harmonics of Aristoxenus* (Αριστοξένου Αρμονικά Στοιχεία, Οξφόρδη 1902).
Mb	Marc Meibom (Marcus Meibomius), *Antiquae Musicae Auctores Septem*, graece et latine, Amsterdam 1652.
Νικόμ. Εγχ.	Νικόμαχος Γερασηνός, *Αρμονικής Εγχειρίδιον*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Παχυμ.	Γεώργιος Παχυμέρης, *Περί Αρμονικής* (Vincent, Notices), Παρίσι 1847, σσ. 401-552.
Πλάτων	Πλάτων, Νόμοι, Πολιτ. (Πολιτεία), Πρωταγ. (Πρωταγόρας), Φίληβος κλπ.
Πλούτ. Περί μουσ.	Πλούταρχος, *Περί μουσικής*.
Πορφύρ. Comment.	Πορφύριος, *Commentarius in Ptolemaei Harmonica*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During Goeteborg 1932.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το ά βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Α' (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2001.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το ά βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Β' (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2002.
Πρόκλου	Πρόκλος, *Εις τον Τίμαιον*, E. Diehl (ed.), Leipzing, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68.
Πρόκλου	Πρόκλος, *Περί της κατά Πλάτωνος θεολογίας*, στο Proclus, Opera inedita, V. Cousin (ed.), Paris, 1864 (αγγλική έκδοση από τους Morrow και Dillon, Princeton, 1987.
Πτολ. Αρμ.	Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During, Goeteborg 1930.
Rein. La us. Gr.	Theodore Reinach, *La musique grecque*, Παρίσι 1926.
Vincent Notices	A. J. H. Vincent, Notices sur divers manuscripts grecs relatifs a la musique, Παρίσι, 1847.
Φιλόλαος	Philolaus, Notices and fragments in Diels-Kranz 44 (Vol. 1, pp. 398-419); Timpanaro Cardini, Pitagorici 18, Fasc. II, pp. 82-249.
Μ. Ψελλ.	Μιχαήλ Ψελλός, *Μουσικής Σύνοψις ηκριβωμένη*, Παρίσι, 1545.
TLG	*MUSAIOS* version 1.0d-32 By Darl J. Dumont and Randall M. Smith.

Β' ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

1. Barker, Andrew, 1989, "*The Euclidean Sectio canonis.*" In *Greek Musical Writings*, vol. 2, Harmonic and Acoustic Theory, pp. 190-208. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Brann, Eva, 1962, *The Cutting of the Canon*, In The Collegian, pp 1-63, Annapolis: St. John's College.
3. Davy, Charles, 1787, "*Euclid's Introduction to the Section of the Canon*" In Letters, addressed chiefly to a young gentleman, upon subjects of literature: including a translation of Euclid's section of the canon; and his treatise on harmonic; with an explanation of the Greek musical modes, according to the doctrine of Ptolemy, 2:264-90. 2 vols. Bury St. Edmonds: Printed for the author by J. Rackham.
4. De Falco, V. (ed.), 1922, Theologumena Arithmeticae, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.
5. Deubner, L. (ed.), 1937, *De vita Pythagorica liber*, ανατ. U. Klein, Teubner, Stuttgart, 1975.
6. Dillon, John (ed.), 1973, *Iamblichi Chalcidensis in Platonis Dialogos: Commentarium Fragmenta*, Leiden, Brill.
7. Fowler, D., 1979, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society, pp. 807-846), New York.
8. Fowler, H., 1999, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, Oxford.
9. Godofredus Stallbaum, *Platonis Opera Omnia, Recensuit et Commentariis Instruxit*, Vol. VII, Continens TIMAEUM ET CRITIAM, Gothae et Erfordiae Sumptibus Guil. Hennings, MDCCCXXXVIII, Londini Apud Black et Armstrong.
10. Grove's, 1954, "Dictionary of Music & Musicians", 5th ed. Macmillan & Co, Ltd., London.
11. Heath, T., 1926, *Euclid; the thirteen books of the Elements*, Dover, N. York.
12. Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Preess, Oxford.
13. Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics (Vol. I, II)*, Dover, N. York.
14. Hoche, Richard, ed. Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II, Leipzing, 1866.
15. Isaac Asimov, 2004, *Το χρονικό των επιστημονικών ανακαλύψεων*, Απόδοση στα ελληνικά Γ. Μπαρουξής-Ν. Σταματάκης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
16. Ivor Thomas, 1980, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London.
17. Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.
18. Mathiesen, Thomas J. "*An Annotated Translation of Euclid's Division of a Monochord*", *Journal of Music Theory*, 19(1975): 236-58.

19. Pearson, L., 1990, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Prees, Oxford.
20. Pistelli. H. (ed.), 1894, In Nicomahi Arithmeticam introductionem, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.
21. Reinach, Theodore, 1999, *Η ελληνική μουσική*, Μτφρ. Αναστασίας-Μαρίας Καραστάθη, σελ. 158, Αθήνα.
22. Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.
23. Spyridis, H., C., 1988, *The Delphi musical system, ένα νέο σύστημα μουσικών διαστημάτων*, Ανακοίνωση στη Γ'Διεθνή Μουσικολογική Συνάντηση των Δελφών με θέμα «*Ρυθμοί, τρόποι και κλίμακες της Μουσικής της Μεσογείου*», Δελφοί.
24. Szabo, Arpad, 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, ΕκδόσειςΤεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.
25. Taylor, A. E., 1992, *ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του)*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.
26. Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, *Εκδόσεις* ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.
27. Wanzloeben, Sigfrid, 1911, *Das Monochord als Instrument und als System*, Halle.
28. West. M., L., 2004, *Αρχαία Ελληνική Μουσική*, Μτφρ. Στ. Κομνηνός, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.
29. Winington, R., P., - Ingram, 1968, *Mode in ancient greek music*, A. M. Hakkert Pub., Amsterdam.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

1. *Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς*, Τόμος Α', 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.
2. *Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*, Τόμος Β', 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.
3. ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ, *Πλάτωνος Τίμαιος*, Εισαγωγή, μετάφραση, Σχόλια Θ. Βλυζιώτης, Χ. Παπαναστασίου, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
4. Γεωργόπουλος, Κ., 1995, *Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήναι.
5. Ευστρατιάδης, Π., 1870, *Αρχαιολογική Εφημερίς*, σελ. 371.
6. Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Αθήνα.
7. Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη.
8. Καϊμάκης, Π., 2005, *Φιλοσοφία και Μουσική*, ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ, Αθήνα.
9. Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.
10. Κάλφας, Βασίλης, 2005, *Φιλοσοφία και Επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.
11. Καπνισάκη, Κώστα, 1983, *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.
12. Καράς Σίμων, 1989, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των

Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα.

13. Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.-Ε.Τ., Αθήνα.
14. Μπίλλα, Π., 1998, *Μαθήματα Αρχαίας Ελληνικής Γραμματικής*, Εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα.
15. Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
16. Παπαθανασίου, Μάρω, *Η Πυθαγορική διανόηση και τα Μαθηματικά*, Ελληνική *Φιλοσοφική Επιθεώρηση*, τ. 3, τχ. 7, Ιαν. 1986.
17. Παπούλας, Β., Ι., 1907, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος, επί τε του αμεταβόλου τόνου και των καθ' έκαστον γενών*, Φόρμιγξ Β', Β', Φ. 6, σ. 2-3.
18. Αυτόθι, Φ. 7-8, σ. 6-7 (συνέχεια).
19. Αυτόθι, Φ. 9, σ. 2-3 (συνέχεια).
20. Αυτόθι, Φ. 19-20, σ. 4-5: *Περί λόγου και αναλογίας, Περί πολλαπλασίων και επιμορίων λόγων, Περί επιμερών*
21. Αυτόθι, Φ. 23-24, σ. 4-5: *Περί πολλαπλασιεπιμορίων, Περί πολλαπλασιεπιμερών και αριθμού προς αριθμόν.*
22. Παπούλας, Β., Ι., 1908, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος επί του Δωρίου τόνου* (του τετάρτου καθ'ημάς ήχου), Φόρμιγξ Β', έτος Δ', Φ. 1-2, σ. 4-5.
23. Ρεμάντας, Α., και Ζαχαρίας, Π.Δ., 1917, *Η μουσική των Ελλήνων ως διεσώθη από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι της σήμερον*, Αρίων, Αθήναι, σ. η'- θ'.
24. Σακελλαρίου, Γεώργιος, 1962, *ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ο διδάσκαλος των αιώνων*, Εκδόσεις ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ, Αθήναι, σ. 174 κ.ε.
25. Σπανδάγου Ευαγ., 2001, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.
26. Σπανδάγου Ευαγ., 2003, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.
27. Σπυρίδης, Χ. Χ., 1988, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
28. Σπυρίδης, Χ. Χ., 1990, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
29. Σπυρίδης, Χ. Χ., 1998, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.
30. Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.
31. Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.
32. Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 222.
33. Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλία 1, 2, 3, 4*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.
34. Σταμάτη, Ε. Σ., 1953, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών – Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX.*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.
35. Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *Ευκλείδου περί ασυμμέτρων στοιχεία, Βιβλίον Χ. Εισαγωγή-Αρχαίον Κείμενον, Μετάφρασις-Επεξηγήσεις, Τόμος III*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.

36. Σταμάτη, Ε. Σ., 1980, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά – Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας*, Αυτοέκδοσις, Αθήναι.
37. Σταμάτης, Ε., Σ., 1963, *Περί του μαθηματικού Ευκλείδου*, μετάφρασις εκ του γερμανικού μετ' εισαγωγής, Εκδ. Οικονομικής & Λογιστικής Εγκυκλοπαιδείας, Αθήνα.
38. Ταίηλορ Νέστωρ, 2000, *Η Αρμονία των Πυθαγορείων*, Εκδ. ΝΕΦΕΛΗ, Αθήνα.